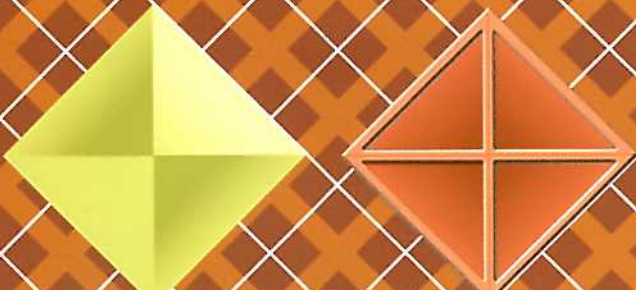
САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР ®

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ



10 11

К заданиям учебника
Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова
ГЕОМЕТРИЯ 10-11

+ РЕШЕНИЕ ВСЕХ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР®

В.Ю. Фадеев

ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР ЗАДАНИЙ ИЗ УЧЕБНИКА ПО ГЕОМЕТРИИ

авторов

Л.С. Атанасяна,
В.Ф. Бутузова и др.
(М.: Просвещение)

10–11 классы

+ РЕШЕНИЯ ВСЕХ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

Москва • «ВАКО» • 2008

УДК 373.167.1: 514
ББК 22.151я72
Ф15

Фадеев В.Ю.
Ф15 Подробный разбор заданий из учебника по геометрии авторов Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова и др.: 10–11 классы. – М.: ВАКО, 2008. – 384 с. – (Сам себе репетитор).

ISBN 978-5-94665-662-7

Пособие содержит подробный разбор всех заданий из учебника по геометрии для 10–11 классов авторов Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова и др. ***(М.: Просвещение).***

Ответы и решения представлены в соответствии со структурой учебника, что значительно облегчит поиск необходимой информации.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 978-5-94665-662-7

Учебно-методическое издание

Сам себе репетитор ®

Фадеев Вячеслав Юрьевич

ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР ЗАДАНИЙ ИЗ УЧЕБНИКА ПО ГЕОМЕТРИИ
Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова и др. *(М.: Просвещение)*

+ РЕШЕНИЯ ВСЕХ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ
10–11 классы

Налоговая льгота – ОКП 005-93-953 (Литература учебная).
Издательство «ВАКО»
Подписано к печати с диапозитивов 29.08.2007.
Формат 70*100/32. Печать офсетная.
Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 15,48.
Тираж 12 000 экз. Заказ № 19840.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат»
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.
www.sarpk.ru

Содержание

Глава I. Параллельность прямых и плоскостей

§ 1. Параллельность прямых, прямой и плоскости

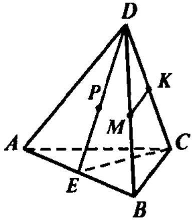


Рис. 1

№ 1. Точки P и E лежат в плоскости ADB, а значит, и прямая PE лежит в плоскости ADB (по аксиоме A_2). Аналогично MK лежит в плоскости BCD. Точки B и D лежат одновременно в плоскостях ABD и BCD, а значит и прямая BD лежит в плоскостях ABD и BCD (рис. 1).

Аналогично AB лежит в плоскости ABD и в плоскости ABC.

Точки C и E лежат одновременно в плоскостях ABC и DEC, а значит, прямая CE лежит в плоскостях ABC и DEC.

б) Точки пересечения прямой DK с плоскостью ABC, прямой CE с плоскостью ADB.

Заметим, что точка C лежит и на прямой DK и в плоскости ABC, а следовательно, DK пересекает ABC в точке C, т. к. точек пересечения не более 1 (т. к. прямая не лежит в плоскости), то это единственная точка.

Аналогично CE пересекается с ABD в точке E.

в) Точки, лежащие в плоскостях ADB и DBC.

В плоскости ADB лежат точки: A, D, B, E, P, M, т. к. точка E лежит на прямой AB, а значит и в плоскости ABD. В плоскости DBC лежат точки: D, B, C, M, K.

г) Прямые, по которым пересекаются плоскости ABC и DCB, ABD и CDA, PDC и ABC.

Плоскости ABC и DCB пересекаются прямой BC, т. к. обе точки B и C лежат в обеих плоскостях. Аналогично: ABD пересекаются с CDA по прямой AD. Т. к. точка $E \in PD$, значит $E \in PDC$ и т. к. точка $C \in PDC$, то прямая $CE \in PDC$, а т. к. $CE \in ABC$, то плоскости ABC и PDC пересекаются по прямой CE.

№ 2. Аналогично № 1: а) в плоскости DCC_1: D, C, C_1, D_1, K, M, R. В плоскости BQC: B_1B, P, Q, C_1, M, C.

б) AA_1B_1; AA_1D_1.

в) $MK \cap ABD = R$; $DK \cap A_1B_1C_1 = D_1$; $BP \cap A_1B_1C_1 = Q$.

г) т. к. точка $B \in AA_1B_1$ и $B \in ACD$, то $AB \in AA_1B_1$ и $AB \in ACD$, а значит $AA_1B_1 \cap ACD = AB$.

PB_1C_1 пересекаются с ABC по прямой BC.

д) $MK \cap DC = R$; $B_1C_1 \cap BP = Q$; $C_1M \cap DC = C$.

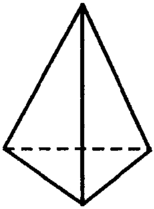


Рис. 3

№ 3.

а) да, см. A_1 ;

б) нет, см. рис. 3;

в) нет (пример — квадрат);

г) да, это A_1.

№ 4. а) Нет. Если A, B, C лежат на одной прямой, то через A, C, D можно провести плоскость α (это аксиома A_1). А тогда точка B лежит в плоскости α, т. к. точка B лежит на прямой AC. А значит точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

б) Нет. Так как, если AB и CD пересекаются, то через них можно провести плоскость (это теорема), а значит A, B, C, D лежат в одной плоскости. Противоречие.

№ 5. Возьмем четвертую точку, не лежащую на этой прямой. По заданию 4а через эти четыре точки можно провести плоскость, что и требовалось. Таких плоскостей бесконечно много, т. к. четвертую точку можно выбирать произвольно.

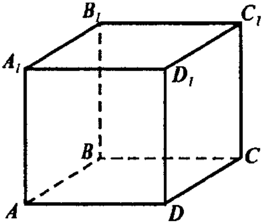


Рис. 2

№ 6. Пусть точки — это точки A, B, C . Проведем через них плоскость. Тогда прямая AB, а значит и отрезок AB лежит в этой плоскости. Аналогично отрезки BC и AC тоже лежат в этой плоскости.

№ 7. Все прямые, не проходящие через точку M и пересекающие эти две прямые, лежат в плоскости, проведенной через эти точки, см. задачу 6.

Все прямые, проходящие через точку M, не обязаны лежать в одной плоскости, см. рис. 2. Например, AB, CB, $B'B$ проходят через точку B, но, очевидно, не лежат в одной плоскости.

№ 8. а) Нет, окружность можно вращать вокруг прямой , соединяющей эти две точки.

б) Да, аналог задачи 7.

№ 9. A, B, $O \in \alpha$, тогда прямая AO лежит в плоскости α, а значит точка C тоже лежит в плоскости α. Аналогично точка $D \in \alpha$ (рис. 4).

Ответ: да.

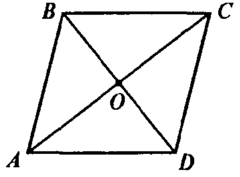


Рис. 4

№ 10. а) Да, аналогично задаче 7.

б) Нет (рис. 5), если $\triangle ABC$ лежит горизонтально, а прямая a вертикально.

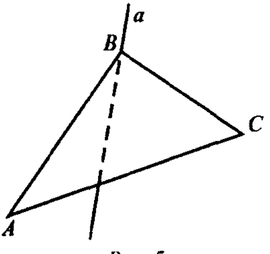


Рис. 5

№ 11. Аналогично задания 6 проводится плоскость через точку и прямую, и все прямые будут лежать в этой плоскости.

№ 12. Да, они пересекаются по прямой AB.

№ 13. а) Нет, т. к. если две плоскости имеют одну общую точку, то они имеют общую прямую (по аксиоме A_3).

б) Аналогично а).

в) Да, это любые две пересекающие плоскости.

№ 14. Если все прямые лежат в одной плоскости, то всегда будет проводиться именно эта плоскость. Если же они не лежат в одной плоскости, то каждая пара образует новую плоскость, так как если 2 плоскости совпадут, то все три прямые лежат в одной плоскости.

Ответ: 1 или 3 плоскости.

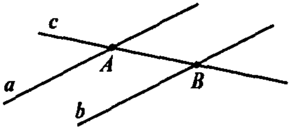


Рис. 6

№ 15. Аналогично задаче 7.

№ 16. Обозначим точки пересечения прямой c с прямыми a и b буквами A и B соответственно.

Так как прямая a лежит в плоскости α, то и точка A лежит в плоскости α. Аналогично точка B лежит в плоскости α (рис. 6).

А тогда, т. к. две точки прямой c лежат в плоскости α, то и прямая вся лежит в плоскости α.

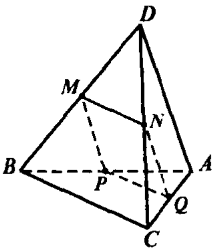


Рис. 7

№ 17. Напомним факт из планиметрии о том, что средняя линия треугольника параллельна основанию и равна половине его длины.

Тогда: точка M — середина BD, точка N — середина DC, а значит MN средняя линия $\triangle DBC$. Значит $MN = \frac{1}{2}BC$; т. к. $BC = 14$ см, то $MN = 7$ см (рис. 7).

Аналогично NQ — средняя линия $\triangle CDA$, $NQ = \frac{1}{2}AD = 6$см.

QP — средняя линия $\triangle ACB$, $QP = \frac{1}{2}BC = 7$ см.

MP — средняя линия $\triangle BDA$, $MP = \frac{1}{2}DA = 6$ см.

Значит периметр $MNQP$ равен
$MN + NQ + QP + PM = 7 + 6 + 7 + 6 = 26$ см.

Ответ: 26 см.

№ 18. Проведем плоскость через параллельные прямые BB_1 и CC_1. Так как AB пересекает эти прямые, то по задаче 16 она лежит в проведенной плоскости, а значит отрезок AB_1 также лежит в данной плоскости, а значит точка C_1 лежит на отрезке AB_1 (рис. 8).

Теперь будем рассматривать $\triangle ACC_1$ и $\triangle ABB_1$ в проведенной нами плоскости, см. рис. 9.

Так как $CC_1 \parallel BB_1$, то $\angle ACC_1 = \angle ABB_1$, $\angle AC_1C = \angle AB_1B$, следовательно, по равенству 3 углов $\triangle ACC_1$ подобен $\triangle ABB_1$

б) Значит $\frac{AB}{AC}=\frac{BB_1}{CC_1}$, но

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC+CB}{AC}=\frac{AC}{AC}+\frac{CB}{AC}=$$

$$=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

Значит, $\frac{BB_1}{CC_1}=\frac{5}{3}$. Отсюда

$$CC_1=\frac{3}{5}\cdot BB_1=\frac{3}{5}\cdot 20=12 \text{ см.}$$

а) аналогично б).

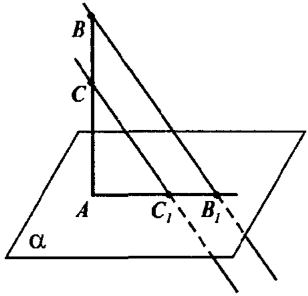


Рис. 8

№ 19. Так как $ABCD$ параллелограмма, то $AB \parallel CD$, а так как AB пересекает плоскость α, то и CD пересекает плоскость α (утв. 2°, п. 6).

Аналогично, т. к. BC пересекает плоскость α, то и AD пересекает плоскость α.

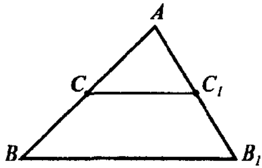


Рис. 9

№ 20. Аналогично задаче 19. Указание: средняя линия трапеции параллельна основаниям.

№ 21. Заметим, что точка D не лежит в плоскости $\triangle ABC$, т.к иначе бы $\triangle ABD$ лежал бы в плоскости $\triangle ABC$, что противоречит условию. Значит прямая DC пересекает плоскость ABC. Аналогично прямая CD пересекает плоскость ABD, а значит любая прямая, параллельная прямой CD, пересекает плоскости $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$.

№ 22. Пусть точка M — середина AC. Точка N — середина BC (рис. 10). Тогда рассмотрим △ABC. Прямая $MN \parallel AB$ как средняя линия треугольника ABC. А т. к. прямая MN параллельна прямой AB, лежащей в плоскости α, то MN параллельна α (по теореме).

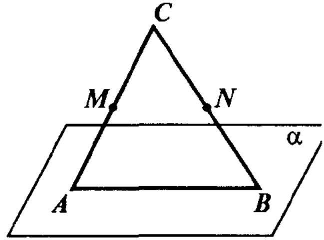


Рис. 10

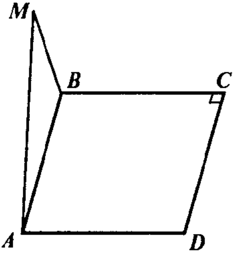


Рис. 11

№ 23. Точки C и D не лежат в плоскости MAB, т. к. иначе бы M лежала в плоскости $ABCD$ (рис. 11).

А значит CD либо пересекает, либо параллельна MAB. Но $CD \parallel AB$, а прямая AB лежит в плоскости MAB. Значит $CD \parallel MAB$.

№ 24. Аналогично задаче 23.

№ 25. Данная прямая параллельна прямой, лежащей в каждой из плоскостей (т. к. является пересечением этих плоскостей), и так как данная прямая не лежит ни в одной из этих плоскостей, то она параллельна этим плоскостям.

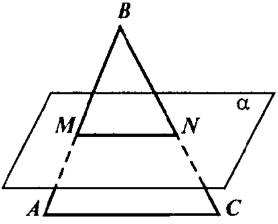


Рис. 12

№ 26. Проведем плоскость ABC. Эта плоскость пересекается с плоскостью α (т. к. AB пересекается с α), а тогда плоскость ABC пересекается с плоскостью α по прямой MN. Тогда по утв. 1 пункта 6 прямая $AC \parallel MN$ (т. к. $AC \parallel \alpha$). А тогда в плоскости ABC $\angle MNB = \angle ACB$ и тогда $\triangle MBN \sim \triangle ABC$ по трем углам (т. к. $\angle B$ — общий) (рис. 12).

№ 27. Указание: провести плоскость через точки A, C, D. Тогда в этой плоскости CD параллельна прямой пересечения плоскостей ACD и α. Надо доказать, что $\triangle ACD \sim \triangle ABE$.

№ 28. Указание: Доказать, что $BC \parallel DE$. Тогла $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, откуда находится BC.

№ 29. Заметим, что CB параллельна плоскости AKD, т. к. $CB \parallel AD$ и по теореме это утверждение следует. А так как плоскость MBC проходит через прямую BC, параллельную плоскости AKD, то прямая, являющаяся пересечением плоскостей AKD и MBC, параллельна прямой BC. Эта прямая a проходит через точку K и лежит в плоскости MBC.

Так как MC пересекает BC, то MC пересекает и a в некоторой точке H. Эта точка H и является точкой пересечения MC и плоскости AKD.

Заметим $KH \parallel BC$. Значит $\angle MKH = \angle MBC$ и $\angle MHK = MCB$. $\triangle MKH \sim \triangle MBC$, тогда $\frac{MB}{MK} = \frac{BC}{KH} = \frac{2}{1}$ (т. к. K — середина MB).

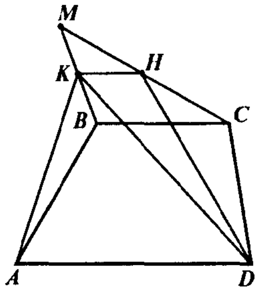


Рис. 13

Следовательно, $KH = \frac{BC}{2} = 6$ см.

Ответ: $KH = 6$ см.

№ 30. а) Так как $AB \parallel CD$, то из того, что $AB \parallel \alpha$ следует, что CD либо параллельна α, либо лежит в плоскости α (из утв. 2; п. 6)

Так как есть точка пересечения DC и α (это точка C), то первый случай невозможен (рис. 14).

Значит, DC лежит в плоскости α.

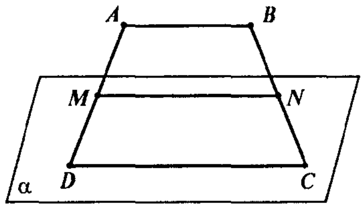


Рис. 14

б) Как известно $MN \parallel CD$, а значит MN либо принадлежит α, либо параллельна ей.

Первый случай невозможен, т. к. иначе бы CN и DM лежали в плоскости α, а следовательно точка A и точка B лежали бы в плоскости α, что противоречит условию. Значит $MN \parallel \alpha$.

№ 31. Указание: по задаче 26 получившиеся треугольники подобны, причем коэффициент подобия равен 2.

№ 32. Разобрана в учебнике.

№ 33. Обозначим плоскости α_1, α_2, α_3.

И пусть $\alpha_1 \cap \alpha_2 = a$, $\alpha_2 \cap \alpha_3 = b$, $\alpha_1 \cap \alpha_3 = c$

Возможны несколько случаев взаиморасположения прямых a, b, c:

1) Никакие 2 из них не пересекаются. Но тогда они параллельны, т. к. a и b лежат в одной плоскости, а значит $a \parallel b$. Аналогично $b \parallel c$ и $a \parallel c$.

2) Какие-то две прямыепересекаются в точке M. Пусть это прямые a и b. Значит точка M лежит во всех плоскостях (т. к. $M \in a \Rightarrow M \in \alpha_1$ и $M \in \alpha_2$, $M \in b \Rightarrow M \in \alpha_2$, $M \in \alpha_3$), а тогда прямые b и c также пересекаются в точке M. (Если только b и c не совпадают, но это п. 3.)

3) Какие-то две прямые совпадают, но тогда эти прямые являются пересечением всех трех плоскостей, а значит плоскости проходят через одну прямую, что противоречит условию.

§ 2. Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми

№ 34. а) Очевидно, что точка B лежит на обеих прямых; значит прямые пересекаются.

б) Так как P — середина DC, а точка N — середина DB, то PN — средняя линия $\triangle CDB$. Значит $PN \parallel CB$.

Прямая PK лежит в плоскости CDB и т. к. она пересекает прямую PN, то PK пересекает CB (т. к. $PN \parallel CB$). Итак, прямые PK и BC пересекаются.

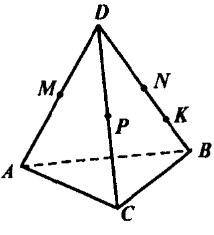


Рис. 15

в) Так как MN средняя линия $\triangle ADB$, то $MN \parallel AB$ и т. к. MN и AB лежат в одной плоскости ABD, то прямые параллельны.

г) Аналогично в).

д) Прямая KN пересекает плоскость ABC в точке B, не лежащей на прямой AC. А тогда по теореме из п. 7 прямые KN и AC скрещиваются.

е) Аналогично д).

№ 35. Предположим, что это не так, но это означает, что обе прямые параллельны прямой a, так как они не пересекаются с a. Но через точку, не лежащую на прямой может быть проведены только одна прямая, параллельная данной. Значит, хоть одна прямая скрещивается с прямой a.

№ 36. Проведем плоскость α через прямые a и b (это можно сделать, так как $a \parallel b$). Прямая c не лежит в плоскости α, так как иначе бы c пересекала бы и прямую b (так как $a \parallel b$). Значит c пере-

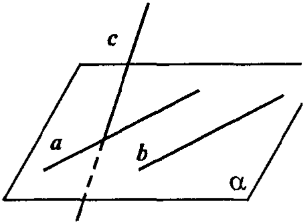


Рис. 16

секает плоскость α, в точке, которая не лежит на прямой b. Значит по теореме прямые c и b скрещиваются.

№ 37. а) Будем рассматривать плоскость ABC. Тогда $A \notin m$, $C \notin m$, т. к. m не имеет общих точек с AC. Значит возможно два случая.

1) $B \in m$, тогда m и BC пересекаются.

2) $B \notin m$, т. е. m пересекает сторону AB внутри. Как известно из планиметрии, если прямая пересекает одну сторону треугольника, то она пересекает и другую сторону; т. к. m не пересекает AC, значит m пересекает BC. Т. е. прямые m и BC пересекаются.

б) Если m пересекает AB в точке B, то прямые m и BC пересекаются. Если же m пересекает AB в точке, не лежащей на прямой BC, и по теореме прямые m и BC скрещиваются.

№ 38. Указание: доказать, что прямая Q лежит в плоскости ромба.

№ 39. Проведем плоскость ABC (рис. 17). Тогда точка D не лежит в плоскости ABC, иначе AB и CD лежали бы в одной плоскости, а они скрещиваются, а значит прямая AD пересекает плоскость ABC. (Заметим, что в точке A.). Тогда по теореме п. 7 из того, что AD пересекает плоскость ABC в точке, не лежащей на прямой BC, следует что AD и BC скрещиваются (то, что A не лежит на прямой BC следует из того, что иначе бы прямые AB и CD пересекались).

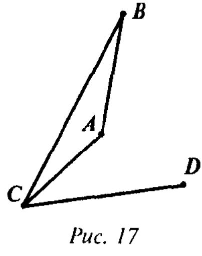


Рис. 17

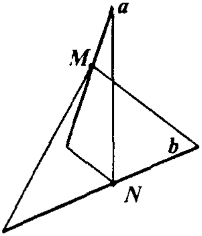


Рис. 18

№ 40. а) Предположим, что прямая $b \in \alpha$. Значит прямые a и b лежат в одной плоскости α. Но тогда они либо параллельны, либо пересекаются, а по условию они скрещиваются. Значит, b не лежит в плоскости α.

б) Точки M и N лежат в обеих плоскостях (по построению). Тогда прямая MN лежит в каждой из плоскостей, т. е. является пересечением α и β. Так как прямая, по которой пересекаются две плоскости может быть только одна, то α и β пересекаются по прямой MN.

№ 41. Указание: Воспользоваться теоремой из п. 5.

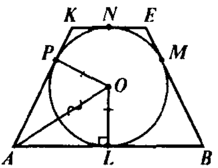


Рис. 19

№ 42. а) $EK \parallel AB$, т. к. это основания трапеции.
$AB \parallel CD$, как противоположные стороны параллелограмма. Отсюда следует, что $EK \parallel CD$ из теоремы п. 5.

б) Рассмотрим трапецию $ABEK$. Обозначим точки касания окружностью L, M, N, P на отрезках AB, BE, EK, KA соответственно. Тогда $AL = AP$, т. к. треугольники OPA и OLA прямоугольные и равны по катету и гипотенузе. Значит равны вторые катеты. Аналогично $KP = KN$, $EN = EM$, $BM = BL$.

Значит периметр $P_{ABEK} = AB + BE + EK + KA = 2AL + + 2BL + + 2NE + 2KN = 2AB + 2KE = 2 \cdot 22{,}5 + 2 \cdot 27{,}5 = 45 + 55 = 100$ см.

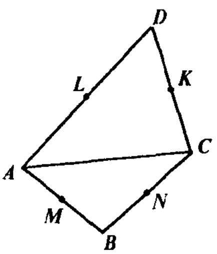


Рис. 20

№ 43. Проведем отрезок AC.

L — середина AD, K — DC, N — CB, M — AB. Рассмотрим $\triangle ABC$: MN — средняя линия $\triangle ABC$, значит

$$MN \parallel AC \text{ и } MN = \frac{1}{2}AC.$$

Рассмотрим $\triangle ADC$: LK — средняя линия $\triangle ADC$, значит

$$KL \parallel AC \text{ и } KL = \frac{1}{2}AC.$$

$$\left.\begin{array}{l} KL \parallel AC \\ MN \parallel AC \end{array}\right\} \Rightarrow KL \parallel MN \qquad \left.\begin{array}{l} KL = \dfrac{1}{2AC} \\ MN = \dfrac{1}{2}AC \end{array}\right\} \Rightarrow KL = MN$$

Значит через точки K, L, M, N можно провести плоскость (т. к. ее можно провести через две параллельные прямые). А тогда в этой плоскости четырехугольник $KLMN$ является параллелограммом, так как противоположные стороны равны и параллельны, т. е. $KLMN$ — параллелограм.

№ 44. Проведем через точку O прямую, параллельную CD. Это будет прямая, совпадающая с OB. Таким образом угол между прямыми OA и CD равен углу между прямыми OA и OB.

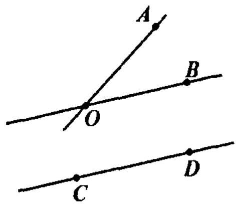


Рис. 21

а) Так как $\angle AOB = 45°$ не превосходит любой из трех оставшихся углов, то угол между OA и OB, а значит и угол между OA и CD равен 45°.

б) $\angle AOB = 135°$, тогда $\angle AOB' = 180° - 135° = 45°$, где B' лежит по другую сторону от точки O, чем точка B, значит именно $\angle AOB'$ есть угол между прямыми OA и OB.

Угол между прямыми OA и CD равен 45°.

в) Аналогично а).

№ 45. Так как a и BC параллельны, то они лежат в одной плоскости. Назовем ее α. Точка D не лежит в плоскости α, так как иначе $CD \in \alpha$, $AB \in \alpha$. т. е. α совпадала с плоскостью $ABCD$ и следовательно a лежала бы в плоскости параллелограмма.

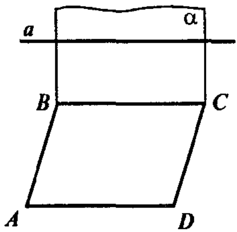


Рис. 22

А тогда CD пересекает α в точке C, которая не лежит на прямой a. По теореме a и CD — скрещивающиеся прямые.

Проведем через точку C прямую, параллельную a. Это будет прямая CB. Значит угол между a и CD равен углу между CB и CD. А этот угол равен острому углу параллелограмма.

а) 50°

б) 121° — это тупой угол, поэтому ответ 180° – 121° = 59°.

Ответ: а) 50°; б) 59°.

№ 46. Указание: аналогично задаче 45. Следует учесть, что диагонали ромба пересекаются под прямым углом и, что диагональ ромба является биссектрисой соответствующего угла.

§ 3. Параллельность плоскостей

№ 47. M — середина BC. K — середина AD. Отметим точки: L — середина BD. N — середина AC.

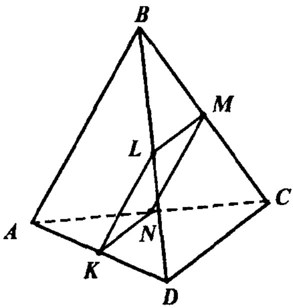


Рис. 23

Докажем, что $KLMN$ — ромб.
Действительно:

$$\left.\begin{array}{l} MN \text{ средняя линия } \triangle ACB \\ KL \text{ средняя линия } \triangle ACB \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} MN \| AB,\ MN = \dfrac{1}{2} AB \\ KL \| AB,\ KL = \dfrac{1}{2} AB \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} MN = KL \\ MN \| KL \end{array}$$

Таким образом мы уже доказали, что $KLMN$ — параллелограмм. Аналогично $ML = \frac{1}{2}CD = KN$, но так как $AB = CD$, то $ML = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB = KL = MN$. Таким образом $KLMN$ — параллелограмм, у которого все стороны равны, а значит он ромб. А тогда MK — диагональ ромба является биссектрисой угла $\angle LMN$, т. е. $\angle LMK = \angle KMN$.

Так как $LM \parallel DC$, то угол между прямыми CD и MK равен углу между прямыми ML и MK.. Аналогично угол между прямыми AB и MK равен углу между прямыми MN и MK.

Так как угол $\angle LMK$ острый (т. к. это половина $\angle LMN$), то угол между прямыми ML и MK равен $\angle LMK$, который равен $\angle KMN$, а это острый угол, который является углом между прямыми KM и MN. т. е. углы между прямыми ML и MK и MK и MN равны, а значит равны и углы между AB и MK, CD и MK.

№ 49. Предположим, что такая плоскость существует. Тогда прямая m, а следовательно и точка B лежит в этой плоскости. А тогда точка B лежит в обеих плоскостях, т. е. эти плоскости пересекаются. Но они должны быть параллельны. Значит, такой плоскости нет.

№ 50. Предположим, что прямая m пересекает плоскостью β в точке M. Тогда $M \in \alpha$ (т. к. $m \in \alpha$) и $M \in \beta$; значит α и β пересекаются, но они параллельны. Значит m не пересекает плоскость α, т. е. параллельна ей.

№ 51. Допустим, что плоскости α и β не параллельны. Тогда они пересекаются по некоторой прямой k. Мы получили, что плоскость α проходит через прямую m, параллельную плоскости β, и пересекает плоскость β по прямой k. Отсюда следует (по свойству 1, п. 6), что m и k параллельны.

Но плоскость α проходит также через прямую n, параллельную плоскости β. Поэтому $n \parallel k$.

Таким образом через точку пересечения m и n проходят две прямые, параллельные прямой k. Но это невозможно. Значит наше предположение неверно и $\alpha \parallel \beta$.

№ 52. Две стороны треугольника параллельны плоскости α. Докажите, что и третья сторона параллельна плоскости α.

Есть $\triangle ABC$ и $AB \parallel \alpha$ и $BC \parallel \alpha$.

Тогда плоскость ABC параллельна α, т. к. прямые AB и BC пересекаются и каждая из них параллельна α. А тогда прямая BC лежит в плоскости ABC, и значит $BC \parallel \alpha$ (см. задачу 50).

№ 53. Докажем, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

Рассмотрим плоскость, проходящую через прямые A_1A_2 и B_1B_2 (такая есть и единственная, т. к. прямые пересекаются) (рис. 24).

В этой плоскости лежит четырехугольник $A_1B_1A_2B_2$, диагонали которого точкой пересечения делятся пополам. А тогда это параллелограмм (по признаку параллелограмма). Значит $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

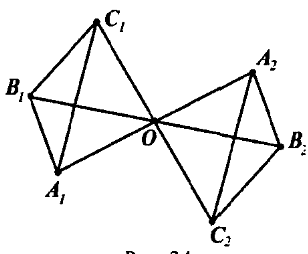


Рис. 24

Аналогично $B_1C_1 \parallel B_2C_2$. А тогда плоскости $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ параллельны по теореме п. 10.

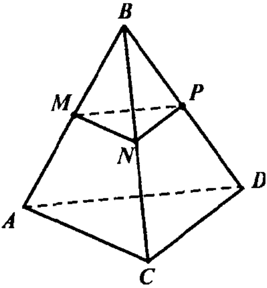


Рис. 25

№ 54. а) Так как M — середина AB, N — середина BC, то MN — средняя линия $\triangle ABC$. Значит $MN \parallel AC$

Аналогично $MP \parallel AD$ (рис. 25).

Тогда по теореме п. 10 плоскости MNP и ADC параллельны.

б) MN — средняя линия $\triangle ABC$, значит $MN = \frac{1}{2}AC$. Аналогично $NP = \frac{1}{2}CD$ и $MP = \frac{1}{2}AD$.

Значит $\frac{AC}{MN} = \frac{CD}{NP} = \frac{AD}{MP} = \frac{2}{1}$. Значит $\triangle ACD$ подобен $\triangle MNP$, причем коэффициент подобия равен 2, а значит

$$\frac{S_{ACD}}{S_{MNP}} = 2^2 = 4 \Rightarrow S_{MNP} = \frac{S_{ACD}}{4} = 12 \text{ см}^2.$$

Ответ: $S_{MNP} = 12$ см^2.

№ 56. Предположим, что прямая a проходит через точку A и параллельна плоскости β. И предположим, что a пересекает α. Но тогда a пересекает и плоскость β (см. задачу 55). То есть a не параллельна β. Противоречие с условием. Значит, прямая a лежит в плоскости α.

№ 57. Возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости:

1) Прямая лежит в плоскости
2) Прямая параллельна плоскости
3) Прямая пересекает плоскость

Если в нашем случае прямая a пересекает вторую плоскость, то она обязана пересекать и первую (см. задачу 55), но a параллельна первой плоскости. Значит третий случай в данной задаче невозможен.

№ 60. Предположим, что α пересекает плоскость β, но тогда плоскость α должна пересекать параллельную к плоскости β плоскость γ (по задаче 58), что противоречит условию. Значит $\alpha \parallel \beta$.

№ 61. Указание: воспользоваться доказательством задачи 59.

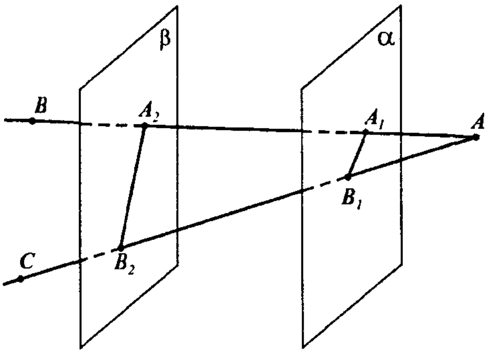


Рис. 26

№ 63. а) Плоскость ABC пересекает параллельные плоскости α и β по прямым A_1B_1 и A_2B_2, а следовательно $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, а тогда $\angle AA_1B_1 = \angle AA_2B_2$ и $\angle AB_1A_1 = \angle AB_2A_2$ как соответствующие углы при пересечении прямыми AB и AC параллельных прямых A_1B_1 и A_2B_2.

А тогда $\triangle AA_2B_2 \sim \triangle AA_1B_1$ по признаку подобия по трем углам.

$AA_2 = AA_1 + A_1A_2 = 6 + 12 = 18$ см, и $\dfrac{AA_1}{AA_2} = \dfrac{6}{18} = \dfrac{AB_1}{AB_2}$ (из подобия треугольников). Отсюда $AB_2 = 3AB_1 = 15$ см.

Ответ: $AA_2 = 18$ см; $AB_2 = 15$ см.

б) A_2B_2 и AA_2, если $A_1B_1 = 18$ см, $AA_1 = 24$ см, $AA_2 = \dfrac{3}{2}A_1A_2$.

Из подобия треугольников имеем: $\dfrac{AA_1}{AA_2} = \dfrac{AB_1}{AB_2} = \dfrac{A_1B_1}{A_2B_2}$

Найдем $\dfrac{AA_1}{AA_2} = \dfrac{AA_2 - A_1A_2}{AA_2} = 1 - \dfrac{A_1A_2}{AA_2} = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

Значит $\dfrac{AA_1}{AA_2} = \dfrac{AB_1}{AB_2} = \dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = \dfrac{1}{3}$.

Отсюда $A_2B_2 = 3A_1B_1 = 54$ см, $AA_2 = 3\ AA_1 = 72$ см.

Ответ: $A_2B_2 = 54$ см, $AA_2 = 72$ см.

№ 64. Точка пересечения прямых — это точка O. Рассмотрим плоскость, проведенную через прямые A_1OA_2 и B_1OB_2. Тогда ясно, что $\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OA_2B_2$ (см. задачу 63), а значит

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OB_1}{OB_2}. \qquad (*)$$

Аналогично, рассматривая плоскость, проведенную через прямые B_1OB_2 и C_1OC_2, получаем, что $\triangle OB_1C_1 \sim \triangle OB_2C_2$, т. е. $\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{OB_1}{OB_2}$, а тогда из (*) видно, что $\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}$.

Аналогично $\triangle OA_1C_1 \sim \triangle OA_2C_2$ и значит $\frac{A_1C_1}{A_2C_2} = \frac{OA_1}{OA_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}$.

Значит $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$, а тогда $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ по третьему признаку подобия.

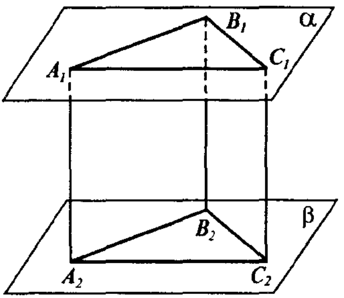


Рис. 27

№ 65. а) Так как A_1A_2 и B_1B_2 — это отрезки параллельных прямых, заключенных между параллельными плоскостями, то они равны (св. 2, п. 11). Значит в четырехугольнике $A_1B_1B_2A_2$ стороны A_1A_2 и B_1B_2 равны и параллельны, значит это параллелограмм (по признаку параллелограмма). Аналогично $B_1C_1C_2B_2$ и $A_1C_1C_2A_2$ — параллелограммы.

б) Из того, что вышеперечисленные четырехугольники являются параллелограммами, то:

$$\left.\begin{array}{l} A_1B_1 = A_2B_2 \\ B_1C_1 = B_2C_2 \\ A_1C_1 = A_2C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2.$$

§ 4. Тетраэдр и параллелепипед

№ 66. Это пары BC и AD, AB и CD, AC и BD, т.к остальные пары являются пересекающимися (рис. 28).

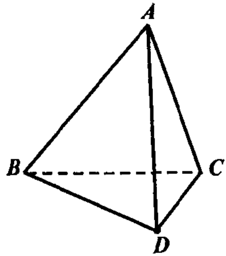


Рис. 28

№ 67. а) Найдем AB (рис. 29):

Рассмотрим $\triangle ADB$: тогда по теореме косинусов

$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 \cdot AD \cdot BD \cdot \cos \angle ADB =$
$= 400 + 324 - 720 \cdot \cos 54°$.

Отсюда находится

$AB = \sqrt{724 - 720 \cdot \cos 54°}$.

Аналогично находится BC и AC.

б) Найдем S_{ADB}.

Рассмотрим $\triangle ADB$. Напомним, что

$S_{ADB} = \frac{1}{2} AD \cdot DB \cdot \sin \angle ADB$, тогда

$S_{ADB} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 18 \cdot \sin 54° = 180 \cdot \sin 54°$.

Площади остальных граней находятся аналогично.

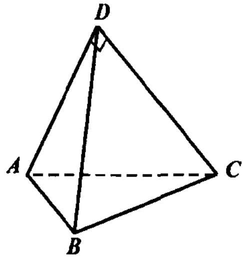


Рис. 29

№ 68. Так как M и N — середины AB и AC, то MN — средняя линия $\triangle BAC$ и значит $MN \parallel BC$. А тогда MN параллельна плоскости BCD (т. к. MN параллельна прямой, лежащей в плоскости BCD).

№ 69. Так как ребро SB параллельно проведенной плоскости и лежит в плоскости SBC, то линия пересечения PN этих плоскостей параллельна SB (утв. 1°, п. 6).

Аналогично линия пересечения MK, проведенной плоскости и плоскости ABC параллельна SB. Значит $MK \parallel NP$ (рис. 30).

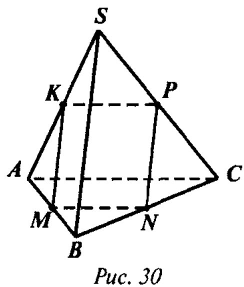


Рис. 30

№ 70. Указание см. задачу 54 а).

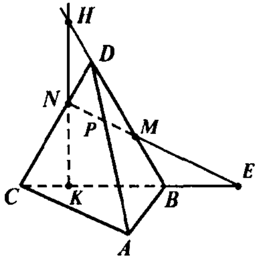


Рис. 31

№ 71. а) Проведем прямую NM до пересечения с прямой CB (эти прямые лежат в одной плоскости BCD и поэтому либо пересекаются, либо параллельны). Если NM параллельна CB, то $NM \parallel ABC$ и значит точки пересечения NM и плоскости ABC нет.

Обозначим точку пересечения NM и BC буквой E. Эта точка и будет точкой пересечения MN и плоскости ABC. (рис. 31)

б) Аналогично а).

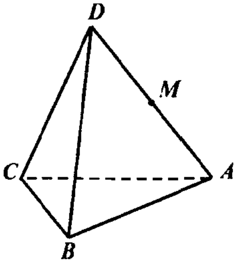


Рис. 32

№ 72. а) Так как секущая плоскость параллельна грани ABC, то она параллельна прямым AB, BC, AC, а значит, пересекает грани ADB, DBC, DAC по прямым параллельным сторонам треугольникам ABC (рис. 32).

Поэтому проведем через точку M прямые, параллельные прмым AB и AC и обозначим соответствующие точки пересечения с DB и DC буквами N и K. Тогда MNK — искомое сечение (рис. 33).

б) См. задачу 2 п. 11.

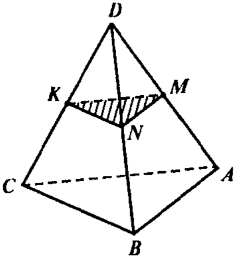


Рис. 33

№ 73. Так как MN — средняя линия $\triangle ABC$, то $MN \parallel AC$, а, значит, AC параллельна плоскости MNP. А тогда линия пересечения плоскостей MNP и ACD параллельна AC (так как AC лежит в плоскости ACD (см. п. 6 утв. 1°)), и проходит через точку P. Проведем прямую $PK \parallel AC$ (рис. 34).

Тогда из подобия $\triangle DPK$ и $\triangle DCA$ (по признаку подобия по трем углам) следует, что

$\frac{DK}{DA} = \frac{DP}{DC} = \frac{1}{2}$, а значит K — середина DA.

Значит четырехугольник $PKMN$ — параллелограмм, т. к. $PK \parallel AC$, $MN \parallel AC \Rightarrow MN \parallel KP$,

$$MK \parallel BD,\ NP \parallel BD \Rightarrow MK \parallel NP,$$

а тогда периметр $PKMN$ равен $2MK + 2MN = BD + AC = 22$ см, так как $MK = \frac{1}{2}BD$, $MN = \frac{1}{2}AC$ как средние линии треугольников ABD и ABC.

Ответ: 22 см.

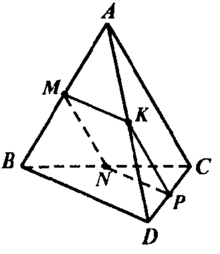


Рис. 34

№ 74. а) Обозначим точку пересечения медиан за M. Чтобы построить сечение параллельное плоскости ABC надо провести прямую через точку M, параллельную BC. Точки пересечения с BD и CD обозначим B' и C'. Проведем прямую $C'A'$ параллельно CA.

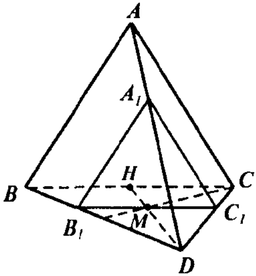


Рис. 35

Таким образом $A'B'C'$ — сечение, параллельное ABC. Тогда $\triangle DAB$ подобен $\triangle DA'B'$ (по трем углам). Аналогично $\triangle DA'C' \sim \triangle DAC$ и $\triangle DB'C' \sim \triangle DBC$.

Отсюда $\frac{B'A'}{BA} = \frac{DA'}{DA} = \frac{DB'}{DB}$

$\frac{DB'}{DB} = \frac{B'C'}{BC}$ $\frac{DA'}{DA} = \frac{A'C'}{AC}$. Тогда ,

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$, а значит $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

б) Рассмотрим медиану DH треугольника DBC. Заметим $B'M \parallel BH$. Тогда $\triangle DMB' \sim \triangle DHB$ (по трем углам), а значит $\frac{DB'}{DB} = \frac{DM}{DH} = \frac{2}{3}$

(т. к. медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1).

Тогда $\frac{A'B'}{AB} = \frac{DB'}{DB} = \frac{2}{3}$.

Значит коэффициент подобия $\triangle A'B'C'$ и $\triangle ABC$ равен $\frac{2}{3}$. Но

тогда $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

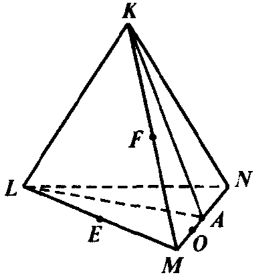


Рис. 36

№ 75. а) Так как точки K и A лежат в плоскости сечения, то прямая KA лежит в плоскости сечения, аналогично LA лежит в плоскости сечения (рис. 36). Таким образом KAL — искомое сечение.

б) Рассматривая тетраэдр $MLKA$, задача аналогична задаче 54 б).

№ 76. Так как

$AA_1 \parallel DD_1$, $DD_1 \parallel CC_1 \Rightarrow AA_1 \parallel CC_1$

$AA_1 = DD_1$, $DD_1 = CC_1$, $\Rightarrow AA_1 = CC_1$.

Значит AA_1C_1A — параллелограмм (по признаку параллелограмма), значит $AC \parallel A_1C_1$. (рис. 37)

Аналогично $BD \parallel B_1D_1$.

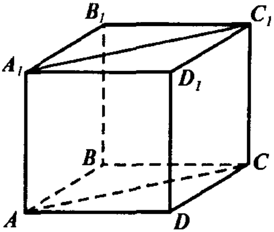


Рис. 37

№ 78. Рассмотрим четырехугольник $M_1B_1N_1D_1$ (рис. 38). В нем противоположные стороны M_1B_1 и N_1D_1 параллельны, так как лежат на параллельных прямых A_1B_1 и C_1D_1. Также из того, что $A_1B_1 = C_1D_1$ и $A_1M_1 = C_1N_1$ следует, что $M_1B_1 = N_1D_1$.

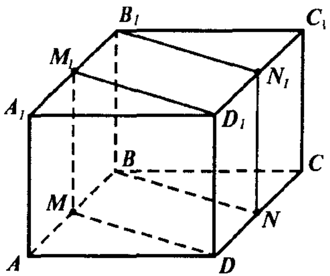


Рис. 38

Значит четырехугольник $M_1B_1N_1D_1$ является параллелограммом (противоположные стороны M_1B_1 и N_1D_1 равны и параллельны).

Аналогично доказывается, что D_1N_1ND, $DNBM$, BMM_1B_1 являются параллелограммами.

Осталось доказать, что MM_1D_1D и BB_1N_1N — параллелограммы. Т. к. MM_1B_1B — параллелограмм, то $MM_1 \parallel BB_1$, а т. к. $BB_1 \parallel AA_1$, то $MM_1 \parallel AA_1$. Также $MM_1 = BB_1 = AA_1$. Но DD_1 тоже параллельна AA_1 и $DD_1 = AA_1$. Тогда $MM_1 \parallel DD_1$ и $MM_1 = DD_1$, значит MM_1D_1D — параллелограмм. Аналогично BB_1N_1N — параллелограмм.

А тогда $MBNDM_1B_1N_1D_1$ — параллелепипед.

№ 79. а) Точки B и C_1 лежат в плоскости сечения, поэтому отрезок BC_1 лежит в плоскости сечения. Но тогда параллельный ему отрезок, проходящий через точку A, также лежит в плоскости сечения. Это будет AD_1. Таким образом ABC_1D_1 — искомое сечение. ABC_1D_1 параллелограмм, т. к. $AB \parallel C_1D_1$ и $AB = C_1D_1$ (рис. 39).

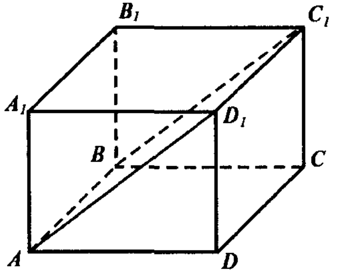


Рис. 39

б) Аналогично а).

№ 80. Сечение плоскостью ABC_1 — это ABC_1D_1, а плоскостью DCB_1 — это DCB_1A_1 (см. задачу 79).

Найдем пересечение двух сечений. Обозначим пересечение A_1D и AD_1 за точку M, а пересечение DC_1 и B_1C за N.

Тогда M и N лежат в плоскостях обоих сечений, а значит MN является пересечением сечений (рис. 40).

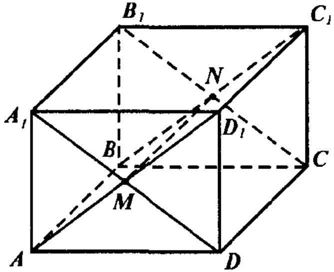


Рис. 40

№ 81. а) Прямые MN и BC лежат в плоскости CBB_1C_1, потому они либо параллельны, либо пересекаются. Если $MN \parallel BC$, то MN параллельна плоскости ABC, т. к. она параллельна прямой, лежащей в плоскости ABC (см. теорему п. 6).

В противном случае найдем точку пересечения MN и BC. Пусть это E. Точка E и есть искомая точка (рис. 41).

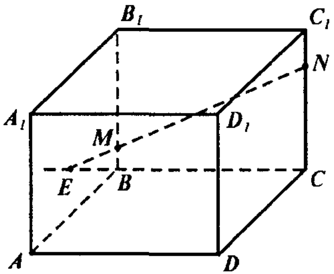


Рис. 41

б) Проведем AM до пересечения с A_1B_1. Точка F и будет точкой пересечения AM и плоскости $A_1B_1C_1$ (см. рис.42).

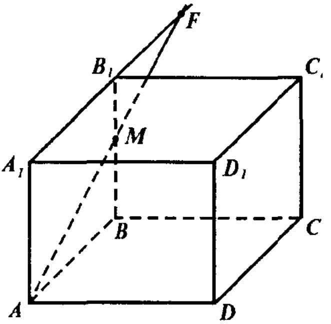


Рис. 42

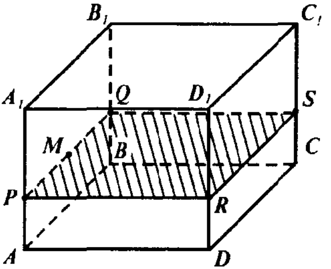


Рис. 43

№ 82. а) Так как сечение параллельно $ABCD$, то прямые AB , BC, CD, AD параллельны плоскости сечения, а, следовательно, прямые, получающиеся при пересечении плоскости сечения с боковыми гранями, параллельны AB, BC, CD, AD соответственно.

Значит надо провести через точку M прямую параллельно AB. Точки пересечения обозначим P и Q. *Далее через* P проводим прямую PR параллельно AD и через Q прямую QS параллельно BC. Таким образом $PQSR$ — искомое сечение (рис. 43).

б) Аналогично а).

в) Прямая, по которой пересекаются плоскость сечения и плоскость AA_1B_1B параллельна BB_1'. Значит проводим через M отрезок PQ параллельно BB_1. Далее через точку Q проводим прямую QS параллельно B_1D_1, а через точку P прямую, параллельную BD. *(рис. 44).*

$PQSR$ — искомое сечение

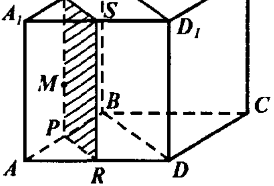


Рис. 44

№ 83. а) Так как $AA_1 \parallel CC_1$, то плоскость сечения параллельна AA_1 , а значит прямая, являющаяся пересечением плоскости сечения и AA_1D_1D параллельна AA_1.

Проведем через M прямую EF параллельно AA_1. А тогда соединив точки C_1 и F; C и E получим, что $CEFC_1$ — искомое сечение (рис. 45).

б) Аналогично задаче 82 в).

№ 84. Проведем через точку M прямую MN, параллельную B_1D_1.

Тогда соединим B_1 с N, а D_1 с M. Таким образом B_1D_1MN — искомое сечение.

Это трапеция, т. к. $B_1D_1 \parallel MN$, а прямые B_1N и D_1M не параллельны (они пересекаются в точке E (рис. 46).

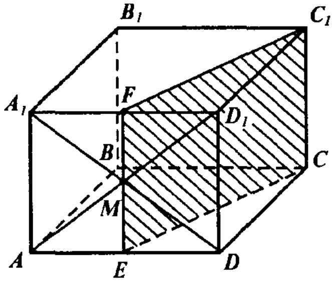


Рис. 45

№ 85. Вначале проведем BK. Потом проведем через точку L прямую, параллельную BK. Это будет LD_1. Теперь соединим K с D_1, а B с L. Таким образом BKD_1L — искомое сечение (рис. 47).

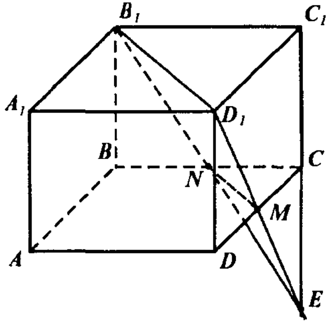


Рис. 46

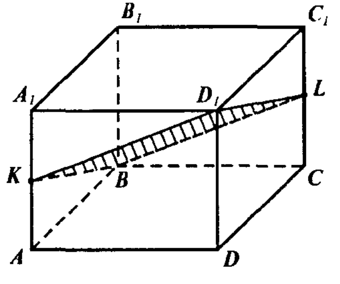


Рис. 47

№ 86. Диагональ BD_1 лежит в плоскости BB_1D_1D, значит линия пересечения плоскости сечения и плоскости BB_1D_1D параллельна DB_1. Точка M — точка пересечения AC и BD. Тогда точка M — середина BD (т. к. $ABCD$ — параллелограмм).

Проведем через точку M прямую, параллельную BD_1. Она пересечет DD_1 в точке K. Заметим, что $\triangle DMK \sim \triangle DBD_1$, а значит точка K — середина DD_1. Соединим точку K с точкой A и точку K с точкой C. Тогда AKC — искомое сечение (рис.48).

Если $ABCD$ — ромб, то $AD = DC$. Если $\angle ABB_1 = 90°$, то ABB_1A_1 — прямоугольник, а следовательно DCC_1D_1 — тоже прямоугольник (см. п. 13 утв. 1°). Тогда $\angle CDK = 90°$.

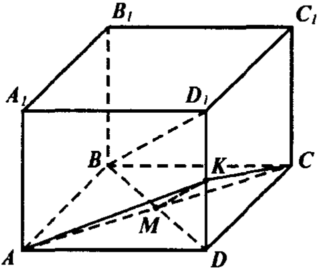


Рис. 48

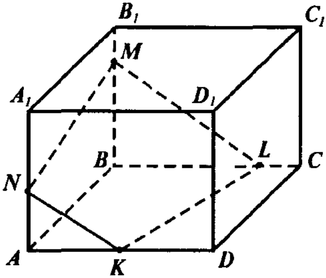


Рис. 49

Аналогично из $\angle CBB_1 = 90°$ следует, что $\angle ADD_1 = 90°$. Тогда $\triangle ADK = \triangle CDK$ ($AD = DC$, KD — общая, $\angle ADK = \angle CDK = 90°$). Следовательно, $AK = KC$, т. е. $\triangle AKC$ равнобедренный.

№ 87. а) Вначале соединим M с N; N с K. Теперь проведем через точку M прямую, параллельную NK. Возможны два случая:

1) Эта прямая пересечет BC в точке L (см. рис. 49). Тогда соединив L с K, получаем, что $NMLK$ — искомое сечение.

2) Эта прямая пересекает CC_1 в точке L. Тогда ML пересекает BC в точке P. Точки P и C лежат в плоскости $ABCD$. Проведем прямую PK и она пересечет CD в точке R (рис. 50).

Тогда $NMLRK$ — искомое сечение.

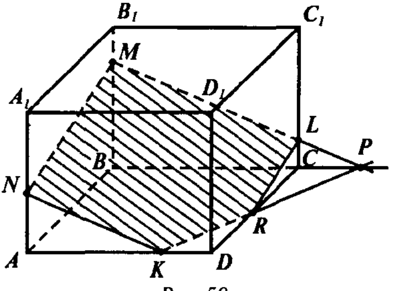


Рис. 50

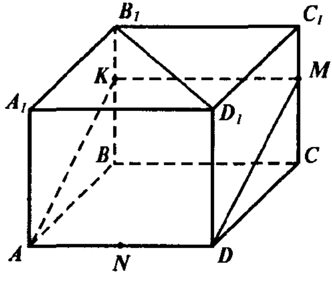


Рис. 51

б) Проведем MK. Возможны два случая:

1) $MK \parallel BC$. Тогда проведем через точку N прямую, параллельную MK. Это будет AD. Таким образом надо соединить K с A и M с D. Тогда $AKMD$ — искомое сечение (рис. 51).

2) MK пересекается с BC в точке L. Тогда проведем через точку N прямую, параллельную MK. Она пересечет AA_1 в точке P. Соединим K с P (см. рис. 52).

3) NL пересекает CD в точке R (т. к. они лежат в одной плоскости $ABCD$). Тогда $KMRNP$ — искомое сечение.

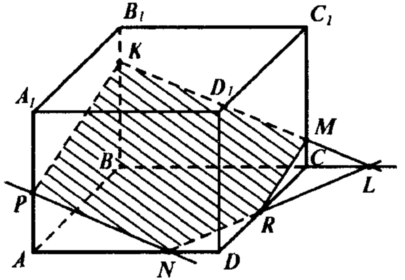


Рис. 52

Вопросы к главе I:

1. Нет, они могут быть скрещивающимися.

2. Таких прямых бесконечно много, но параллельна только одна.

3. Нет, так как иначе $a \parallel b$.

4. а) да; б) нет; в) да

5. Бесконечно много. Да, они параллельны друг другу.

6. Нет, т. к. иначе $a \parallel \alpha$.

7. Нет, вторая прямая может лежать в этой плоскости.

8. Нет, они могут пересекаться и лежать в параллельной плоскости.

9. а) да; б) да.

10. Нет, иначе бы $a \parallel b$.

11. Да, т. к. прямые, на которых лежат боковые стороны трапеции, пересекаются и параллельны α. Значит плоскость трапеции параллельна α..

12. Да, если это две смежные стороны. Нет, если это противоположные стороны.

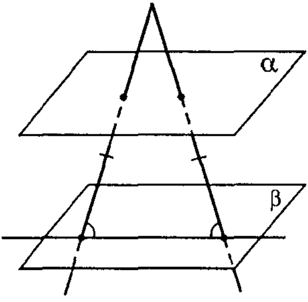


Рис. 53

13. Да (см. рис. 53).

14. Нет, т. к. иначе в какой-то грани было бы два прямых угла.

15. а) нет, т. к. противоположные грани равны.

б) нет

в) нет, т. к. в параллелограмме не может быть более двух острых углов.

г) да

д) нет.

16. а) треугольник и четырехугольник;

б) треугольник, четырех-, пяти-, шестиугольник.

Дополнительные задачи

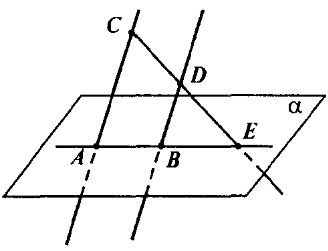


Рис. 54

№ 88. а) Проведем плоскость через прямые AC и BD. Если $CD \parallel AB$, то $ACDB$ — параллелограмм, значит $AC = BD$, но $AC = 8$ см, а $BD = 6$ см. Значит CD не параллельна AB, но так как они лежат в одной плоскости, то CD пересекает AB в точке E (рис. 54).

б) Заметим, что $\angle CAE = \angle DBE$, $\angle ACE = \angle BDE$ как соответствующие углы при параллельных прямых.

Значит $\triangle EDB \sim \triangle ECA$ (по трем углам).

Значит $\dfrac{EA}{EB} = \dfrac{AC}{BD}$, т. е. $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{4}{3}$.

$\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{AB}{BE} + \dfrac{BE}{BE} = \dfrac{AB}{BE} + 1 = \dfrac{4}{3}$.

Следовательно $AB = \dfrac{1}{3} BE$, $BE = 12$ см.

№ 89. Проведем медиану AA_1 в $_1ABC$ (рис.55). Тогда $AM_1 : M_1A_1 = 2 : 1$, а также $DM_2 : M_2A_1 = 2 : 1$. Значит, $\frac{A_1M_1}{A_1A} = \frac{A_1M_2}{A_1D} = \frac{1}{3}$. Тогда $\triangle A_1M_2M_1 \sim \triangle A_1DA$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

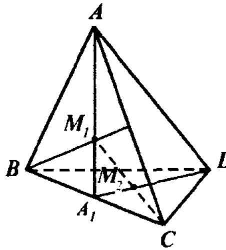


Рис. 55

Таким образом $\angle A_1M_2M_1 = \angle A_1DA$, а тогда $M_2M_1 \mid AD$, т. к. соответствующие углы равны.

№ 90. а) Если AB основание трапеции, то $CD \| AB$, а следовательно $CD \| \alpha$ (теорема п. 6).

б) AB не параллельна CD. Так как они лежат в одной плоскости $ABCD$, то AB пересекается с CD. Значит CD пересекает плоскость α.

№ 91. Указание: воспользоваться теоремой и утв. 1° п. 6.

№ 92. Одна из двух параллельных прямых a и b параллельна плоскости α. По утв. 2° п. 6 следует, что вторая прямая a либо параллельна α, либо лежит в ней.

№ 93. Проведем плоскость α через a и b. Прямая MN не лежит в плоскости α, т. к. иначе MN пересекала бы прямую b. Значит, прямая MN пересекает плоскость $\underline{\alpha}$ в точке M, не лежащей на прямой b. А следовательно по теореме п. 6 MN и b скрещиваются.

№ 94. Да, так как эти плоскости имеют одну общую точку , а следователь и общую прямую. Эти плоскости не совпадают, так как две данные прямые не лежат в одной плоскости.

№ 95. Предположим, что $\beta \| \alpha$. Тогда из того, что прямая a пересекает плоскость β следовало бы, что a пересекает и плоскость α (задача 55). Но a параллельна α. Значит, предположение неверно, и плоскость β пересекает плоскость α.

№ 96. Указание: провести через прямую плоскость, параллельную данной плоскости и воспользоваться утв. 2° и п. 11.

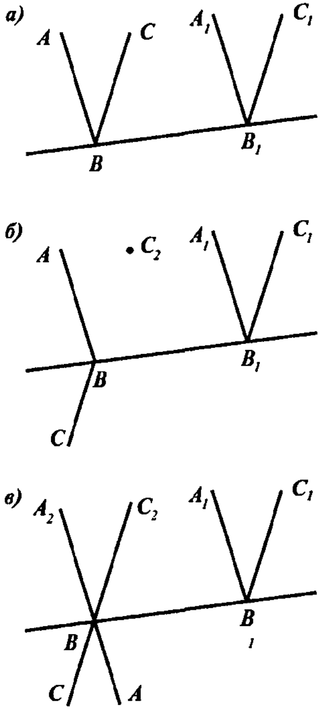


Рис. 56

№ 97. Рассмотрим два угла: $\angle ABC$ и $\angle A_1B_1C_1$, и пусть $AB \parallel A_1B_1$ и $BC \parallel B_1C_1$.

Проведем прямую BB_1.

Возможны три случая:

1) Пары лучей BA и B_1A_1; BC и B_1C_1 сонаправлены, но тогда углы $\angle ABC$ и $\angle A_1B_1C_1$ равны (см. теорему п. 8) (рис. 56 а).

2) Лучи BA и B_1A_1 сонаправлены, а лучи BC и B_1C_1 не сонаправлены (рис. 56 б). Тогда рассмотрим угол ABC_2 — смежный к $\angle ABC$ и по теореме п. 7 следует, что $\angle ABC_2 = \angle A_1B_1C_1$, а значит $180° = \angle ABC_2 + \angle ABC = \angle A_1B_1C_1 + \angle ABC$.

3) Обе пары лучей не сонаправлены. Тогда рассмотрим $\angle A_2BC_2$ вертикальный к $\angle ABC$.

Тогда $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2BC_2 = \angle ABC$ (см. рис. 56 в).

№ 98. Возьмем точку M на прямой a. Через точку M проходит только одна плоскость β, параллельная α (см. задачу 59). Тогда прямая a лежит в плоскости β, так как если бы a пересекала бы β, то она пересекала бы и плоскость α, параллельную плоскости β (см. задачу 55), но $a \parallel \alpha$.

Эта плоскость единственна, т. к. любая другая плоскость, проходящая через прямую a, пересекает плоскость β, а тогда она пересекает и плоскость α (см. задачу 58).

№ 99. Рассмотрим параллельные плоскости α, β, γ и две прямые: a и b.

Прямая a пересекает плоскости в точках: A, B, C. Проведем через точку A прямую c, параллельную b. c пересекает плоскости в точках A, B_1, C_1. b пересекает плоскости в точках A_2, B_2, C_2. Тогда $A_2B_2 = AB_1$, $B_2C_2 = B_1C_1$ (см. утв. 2° п. 11).

Тогда рассмотрим плоскость ACC_1. Она пересекает плоскость β по прямой BB_1, а плоскость γ по прямой CC_1, но так как $\beta \parallel \gamma$, то по утв. 1° п. 11 $BB_1 \parallel CC_1$.

Но тогда в плоскости ACC_1 параллельные прямые BB_1 и CC_1 пересекают прямые AC и AC_1. Тогда по теореме Фалеса

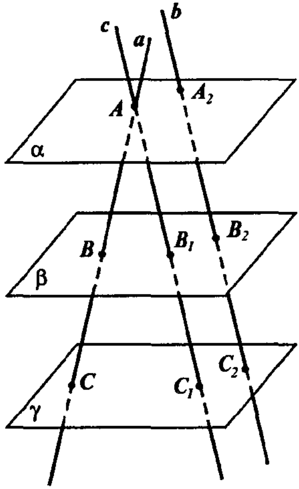


Рис. 57

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C_1}, \text{ но } \frac{AB_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}, \text{ т. е. } \frac{AB}{BC} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$$

№ 100. Проведем через точку A прямые a' и b', параллельные данным прямым a и b. Прямые a' и b' пересекаются, так как иначе они совпадают и значит $a \parallel b$, но a и b скрещиваются.

Тогда через a и b' можно провести плоскость α.

Заметим, что a и b одновременно не лежат в плоскости α, так как a и b скрещиваются. Значит возможны два случая:

1) Ни a, ни b не лежит в плоскости α. Тогда $a \parallel \alpha$ и $b \parallel \alpha$, так как они параллельны лежащим в плоскости прямым a' и b' соответственно.

2) Одна из прямых (например a) лежит в плоскости α. Тогда b не лежит в плоскости α, и прямая $b \parallel \alpha$, т. к. $b \parallel b'$, а $b' \in \alpha$.

№ 101. Указание: Воспользоваться решением задачи 17. Доказать, что три получившихся четырехугольника — параллелограммы, а следовательно, диагонали в каждом делятся точкой пересечения пополам.

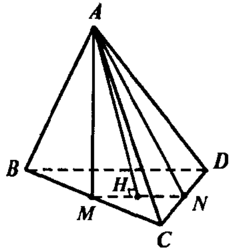


Рис. 58

№ 102. Заметим, что в $\triangle BCD$ MN является средней линией, значит $BD \parallel MN$, а тогда BD параллельна плоскости AMN (теорема п. 6) (рис. 58).

Так как MN — средняя линия $\triangle BCD$, то $MN = \frac{1}{2} BD$, т. е. $MN = 10$ см. Найдем AN.

Так как $AC = CD = AD = 20$ см, то $\triangle ACD$ — равносторонний, а значит AN является и высотой (т. к. AN — это медиана). Значит $\angle ANC = 90°$.

По теореме Пифагора

$AN^2 = AC^2 - CN^2$, т. е. $AN^2 = 400 - 100 = 300$.

Таким образом, $AN = 10\sqrt{3}$ см. Аналогично $AM = 10\sqrt{3}$ см.

Теперь рассмотрим $\triangle MAN$ — это равнобедренный треугольник, который и является сечением тетраэдра плоскостью α. Проведем высоту AH. AH также является медианой. Значит $MH = \frac{1}{2} MN =$ $= 5$ см.

Теперь по теореме Пифагора из того, что $\triangle AHM$ — прямоугольный, следует, что

$AH^2 = AM^2 - MH^2 = 300 - 25 = 275$, т. е. $AH = \sqrt{275} = 5\sqrt{11}$ см.

Тогда $S_{AMN} = \frac{1}{2} AH \cdot MN = 25\sqrt{11}$ см^2.

$P_{AMN} = AM + MN + NA = 10\sqrt{3} + 10 + 10\sqrt{3} = 10(2\sqrt{3} + 1)$ см.

№ 103. Указание: из подобия $\triangle DMP \sim \triangle DAC$, $\triangle DCB \sim \triangle DPN$ вывести, что $MP \parallel AC$, $PN \parallel BC$, т. е. плоскости параллельны. Далее:

$\frac{MP}{AC} = \frac{PN}{CB} = \frac{MN}{AB}$, следовательно $\triangle MNP \sim \triangle ABC$ и отсюда найти площадь $\triangle MNP$.

№ 104. Так как AC параллельна плоскости сечения, то линии пересечения плоскости сечения с плоскостями ABC и ADC параллельны AC (утв. 1° п. 6). Таким образом проведем через точку M прямую MN, параллельную AC

Аналогично надо в плоскости ABD провести прямую ML параллельно BD.

Теперь в плоскости DAC проведем прямую LK параллельно AC. Соединим K и N.

Тогда $KLMN$ — искомое сечение (см. рис. 59).

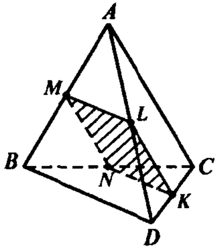


Рис. 59

№ 105. Изобразите тетраэдр $DABC$ и отметьте точки M и N на ребрах BD и CD и внутреннюю точку K грани ABC. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

Проведем MN. Возможны два случая:

1) MN пересекает BC в некоторой точке E (рис. 60).

Тогда проведем EK. Эта прямая пересечет AC и AB в точках P и Q. Тогда соединив P с N и Q и M получим $MNPQ$ — искомое сечение.

2) MN параллельна BC (рис. 61). Но тогда плоскость сечения параллельна BC (теорема п. 6). Таким образом пересечение плоскости сечения с плоскостью ABC параллельно BC. Проведем прямую PQ через точку K параллельно BC, пересекающую AC и AB в точках P и Q. Тогда $MNPQ$ — искомое сечение.

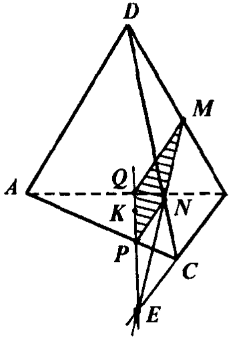


Рис. 60

№ 106. Указание: Провести KN, которая либо пересечет DB в точке P. Тогда воспользоваться задачей 105, либо BC в точке Q, тогда провести QM.

№ 107. Указание: Задача аналогична задаче 3 из п. 14.

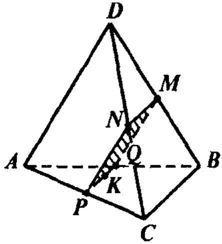


Рис. 61

№ 108. Построим точки A_2, B_2, C_2 на DA, DB, DC так, что $DA_2 = DB_2 = DC_2$ и DC_1 пересекает A_2B_2 в точке C_3. Так как $\triangle A_2DB_2$ — равнобедренный, то DC_3 — биссектриса, а значит и медиана. Таким образом $A_2C_3 = C_3B_2$.

Аналогично $B_2A_3 = A_3C_2$ и $C_2B_3 = B_3A_2$. Тогда A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 — медианы $\triangle A_2B_2C_2$. Значит они пересекаются в точке O_1. Значит плос-

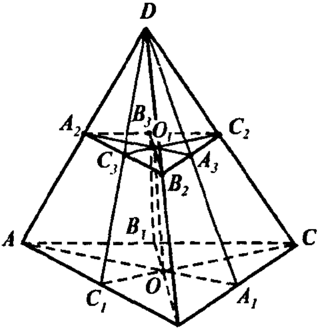


Рис. 62

кости A_2DO_1, B_2DO_1 , C_2DO_1 пересекаются по прямой DO_1. Таким образом плоскости A_2A_3D, B_2B_3D, C_2C_3D пересекаются по одной прямой DO_1.

Но это означает, что плоскости DAA_1, DCC_1, DBB_1 пересекаются по прямой DO_1, которая является общей для этих плоскостей. Но это означает, что точка O, которая является точкой пересечения DO_1 и ABC является точкой пересечения AA_1, BB_1, CC_1. (рис. 62)

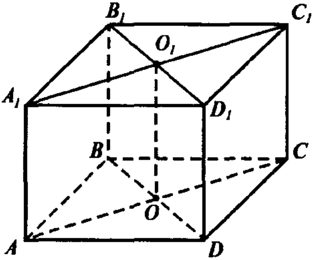


Рис. 63

№ 109. Рассмотрим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Тогда две плоскости — это BB_1D_1D и AA_1C_1C (рис. 63).

Но AC пересекается с BD в точке O, а A_1C_1 пересекается с B_1D_1 в точке O_1. Таким образом прямая OO_1 и есть прямая а OO_1 — есть средняя линия параллелограммов AA_1CC и BB_1D_1D, а значит параллельна всем боковым ребрам параллелепипеда.

Любая диагональ параллелепипеда лежит в одной из данных плоскостей, а тогда она пересекает OO_1, т. к. пересекает параллельную ей соответствующую ей в этой плоскости боковую сторону параллелепипеда.

№ 110. Заметим, что $A_1B \parallel D_1C$ и $A_1D \parallel B_1C$, т. к. четырехугольник A_1BCD_1 и A_1DC_1 — параллелограммы (рис. 64)

Но тогда плоскости A_1BD и B_1CD_1 параллельны (по теореме п. 10).

№ 111. Докажем, что

$AC_1 < AB_1 + B_1C_1$

(по неравенству треугольника).

$AB_1 < AA_1 + A_1B_1$. Тогда

$AC_1 < AA_1 + A_1B_1 + B_1C_1 = AA_1 + AB + AD$. (рис. 65)

№ 112. Как известно из планиметрии сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. Таким образом, рассмотрим AA_1C_1C — параллелограмм.

Значит $AC_1^2 + A_1C^2 = AA_1^2 + A_1C_1^2 + C_1C^2 + AC^2$

Аналогично $B_1D^2 + BD_1^2 = BB_1^2 + B_1D_1^2 + D_1D^2 + BD^2$

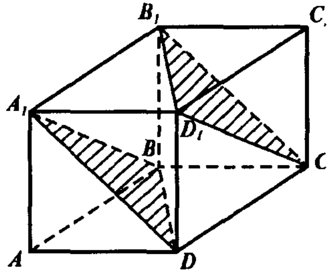


Рис. 64

Значит (1) $AC_1^2 + B_1D^2 + BD_1^2 = AA_1^2 + A_1C_1^2 + CC_1^2 + AC^2 + BB_1^2 + B_1D_1^2 + DD_1^2 + BD^2$, но A_1C_1 и B_1D_1 — диагонали параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, поэтому $A_1C_1^2 + B_1D_1^2 = A_1D_1^2 + B_1C_1^2 + C_1D_1^2 + A_1D_1^2$.

Аналогично $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$.

Таким образом подставляя эти два равенства в (1) получаем:

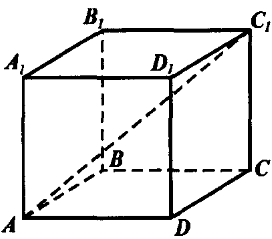


Рис. 65

$$AC_1^2 + A_1C^2 + B_1D^2 + BD_1^2 =$$
$$= AA_1^2 + A_1B_1^2 + B_1B^2 + AB^2 + AD^2 + BC^2 + A_1D_1^2 + B_1C_1^2 + CD^2 + CC_1^2 + DD_1^2 + D_1C_1^2.$$

№ 113. Точки B и D_1 лежат в плоскостях обоих сечении, поэтому плоскости сечений пересекаются по прямой BD_1.

№ 114. Так как плоскость сечения параллельна ACC_1, то прямые AC и CC_1 параллельны плоскости сечения.

А тогда линии пересечения плоскости сечения с плоскостями

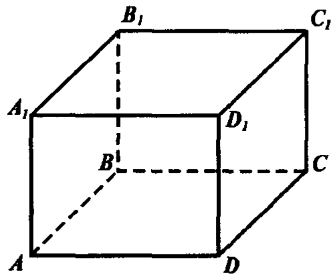


Рис. 66

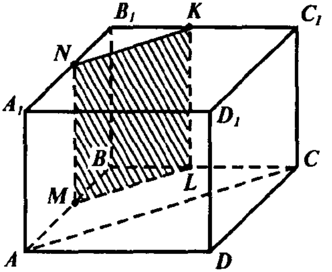


Рис. 67

$ABCD$ и AA_1B_1B параллельны прямым AC и CC_1 соответственно. Поэтому проведем через точку M прямую, параллельную AC. Она пересечет BC в точке L. Проведем через точку M прямую MN параллельно CC_1. Аналогично проведем прямую LK параллельно CC_1. Соединим K с N.

$KLMN$ — искомое сечение.

№ 115. Указание: провести прямую MK параллельно BD, а далее провести KN параллельно DC_1. MNK — искомое сечение.

Глава II. Перпендикулярность прямых и плоскостей

§ 1. Перпендикулярность прямой и плоскости

№ 116. а) Если $\angle BAD = 90°$, то параллелограмм $ABCD$ являются прямоугольником. Тогда $\angle BCD = 90°$, т. е. $DC \perp CB$

Но $CB \parallel C_1B_1$, тогда по лемме п. 15 следует, что $CD \perp C_1B_1$.

Аналогично

$AB \perp AD$, $AD \parallel A_1D_1 = AB \perp A_1D_1$.

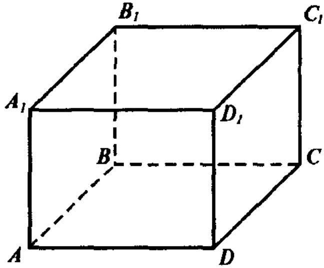


Рис. 68

б) Заметим, что $DD_1 \parallel CC_1$ и $AB \perp CC_1$, $AB \perp DD$ (по лемме п.15) $AB \parallel A_1B_1$ и $AB \perp DD_1$, следовательно $AB \perp DD_1$.

№ 117. MN — средняя линия ABC, поэтому $MN \parallel BC$. Но $BC \perp AD$, поэтому по лемме п. 15 следует, что $MN \perp AD$ (рис. 69).

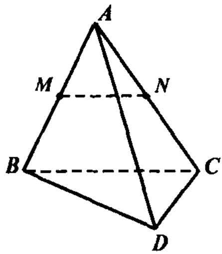


Рис. 69

№ 118. Так как $OA \perp \alpha$, то $OA \perp OB$ (т. к. OB лежит в плоскости α) (рис.70).

Значит $\angle AOB = 90°$.

Аналогично $\angle MOC = 90°$, $\angle DOA = 90°$.

Рассмотрим $\triangle DOA$: $\angle DOA = 90°$, значит $\angle DAM \neq 90°$, также $\angle BMO < 90°$.

№ 119. а) т. к. $OB \perp OA$, то OB являются серединным перпендикуляром к отрезку AD, тогда $AB = BD$ (рис. 71).

б) $\angle AOB = \angle AOC = 90°$. т. к. OA перпендикулярна к плоскости OBC $OB = OC$ (по условию) и сторона OA — общая. Тогда $\triangle AOC = \triangle AOB$, тогда $AB = AC$.

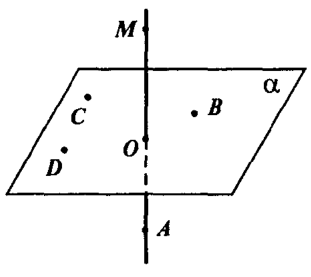


Рис. 70

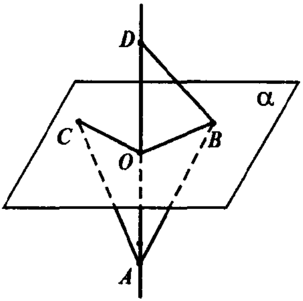


Рис. 71

в) Аналогично б) $\triangle AOC =$ $= \triangle AOB$ по признаку равенства прямоугольных треугольников.

№ 120. Обозначим наш квадрат $ABCD$. Тогда т. к. $OK \perp ABCD$, то $OK \perp OA$.

Найдем OA:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ т. к. $\angle ABC = 90°$, таким образом $AC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$ (рис. 72).

Тогда $AO = \frac{1}{2}\text{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$

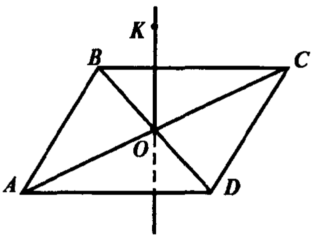


Рис. 72

Но $\triangle AOK$ — тоже прямоугольный, значит

$AK^2 = AO_2 + OK^2$

$AK = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + b^2}$. KB, KC, KD находятся абсолютно также.

№ 121. Указание: аналогично задаче 120. Следует учесть, что медиана CM прямоугольного $\triangle ABC$ равна половине гипотенузы AB. Надо дважды применить теорему Пифагора для $\triangle ABC$ и $\triangle KMC$.

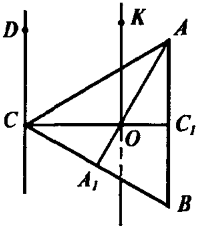


Рис. 73

№ 122. Найдем DA, DB, DC.

$AB = AC = BC = 16\sqrt{3}$.

Заметим, что $AC \perp DC$. Значит

$DA^2 = DC^2 + AC^2$

$DA = \sqrt{768 + 256} = 32$ см (рис. 73)

Аналогично $DB = 32$ см. $DC = 16$ см (по условию).

Найдем KA, KB, KC.

Заметим, что $OK \perp OA$, $OK \perp OC$, $OK \perp OB$, т. о. $KA^2 = KO^2 + OA^2$. Значит надо найти OA.

O — это точка пересечения медиан треугольника ABC. Значит $OA = \frac{2}{3}AA_1$, но т. к. $\triangle ABC$ — правильный, то AA_1 является также высотой. Поэтому $AA_1^2 = AC^2 - CA^2$, т. е. $AA_1 = 24$ см. Аналогично BB_1 и CC_1 равны 24 см.

Отсюда $OA = OB = OC = 16$ см.

Далее $KA = KB = KC = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$ см.

№ 124. Так как $PP_1 \perp \alpha$ и $QQ_1 \perp \alpha$, то $PP_1 \parallel QQ_1$.

Проведем плоскость через прямые PP_1 и QQ_1. Тогда прямые PQ и P_1Q_1 лежат в этой плоскости и не пересекаются, т. к. иначе прямая PQ не была бы параллельна плоскости α.

Таким образом, четырехугольник PQQ_1P_1 — параллелограмм. Значит $PQ = P_1Q_1$.

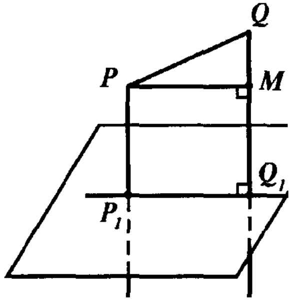


Рис. 74

№ 125. $PP_1 \perp \alpha$, $QQ_1 \perp \alpha$, тогда $PP_1 \parallel QQ_1$, и т. к. прямая P_1Q_1 лежит в плоскости α, то $\angle QQ_1P_1 = \angle PP_1Q_1 = 90°$ (рис. 74).

Проведем через PP_1 и QQ_1 плоскость β. Проведем прямую PM параллельно P_1Q_1. Эта прямая лежит в плоскости β, т. к. в противном случае прямая P_1Q_1 также пересекала бы плоскость β, но P_1Q_1 лежит в плоскости β.

Значит, $PM \parallel P_1Q_1$ и $P_1Q_1 \perp PQ$. Тогда $PM \perp QQ_1$, т. е. $\angle PMQ_1 = 90°$. Таким образом PMQ_1P_1 прямоугольник и $P_1Q_1 = PM$.

Найдем PM из треугольника PMQ:

$PM^2 = PQ^2 - QM^2 = PQ^2 - (QQ_1 - Q_1M)^2 = PQ^2 - (QQ_1 - PP_1)^2 = 15^2 - (33.5 - 21.5)^2 = 15^2 - 12^2 = 81$, т. е. $P_1Q_1 = PM = 9$ см.

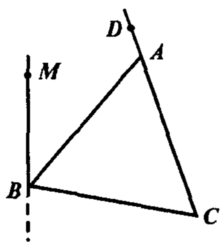


Рис. 75

№ 126. Так как MB перпендикулярна к пересекающимся прямым AB и BC, лежащим в плоскости ABC, то прямая MB перпендикулярна к плоскости ABC (рис. 75) по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

Таким образом, прямая MB перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости ABC.

Если $D \in AC$, то прямая BD лежит в плоскости ABC, и значит, $MB \perp BD$, т. е. $\triangle MBD$ прямоугольный ($\angle MBD = 90°$).

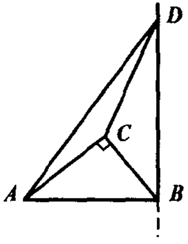


Рис. 76

№ 127. Так как $BD \perp ABC$, то BD перпендикулярна любой прямой из плоскости ABC. Таким образом $DB \perp AC$ (рис. 76).

Но $AC \perp CB$, значит AC перпендикулярна прямым CB и BD, которые пересекаются. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости AC перпендикулярна плоскости BCD. Прямая CD лежит в плоскости BCD.

А тогда $AC \perp CD$.

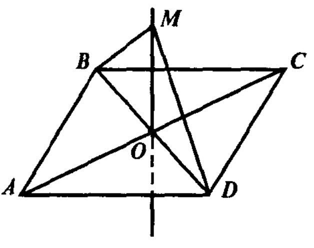


Рис. 77

№ 128. Так как диагонали $ABCD$ делятся точкой пересечения пополам, то $AO = OC$ и $BO = OD$ (рис. 77).

Значит, т. к. $MB = MD$, то в равнобедренном треугольнике BMD медиана MO является высотой, т. е. $MO \perp OD$.

Аналогично $\triangle AMC$ — равнобедренный, значит $MO \perp AC$.

Тогда MO перпендикулярна двум пересекающимся прямым BD и AC плоскости параллелограмма, а следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, MO перпендикулярна плоскости $ABCD$.

№ 129. Указание:
а) доказать, что $BD \perp AC$ и $BD \perp AM$; б) вывести из пункта а).

№ 130. а) Так как $BM \perp AB$ и $BM \perp BC$, то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая BM перпендикулярна плоскости $ABCD$.

$MA^2 = MB^2 + BA^2$, $MA = \sqrt{m^2 + n^2}$

$MB = m$ (по условию) $MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \sqrt{m^2 + n^2}$

$MD^2 = MB^2 + BD^2 = MB^2 + BC^2 + CD^2$ (т. к. $\triangle BCD$ — прямоугольный, $\angle C = 90°$).

Значит $MD^2 = m^2 + 2n^2$.

б) По задаче 129 $MO \perp AC$, O — точка пересечения диагоналей, значит $\triangle MBO$ — прямоугольный, а расстояние от точки M до прямой AC — это MO.

$$MO^2 = MB^2 + BO^2 = \sqrt{m^2 + \frac{n^2}{2}}, \text{ т. к. } BD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,n$$

Расстояние от точки M до BO — это $MB = m$ (по условию).

№ 131. Так как $AB = AC$, то $\triangle BAC$ — равнобедренный. AM — его медиана, следовательно AM — его высота, т. е. $AM \perp BC$ (рис. 78).

$\triangle BDC$ — также равнобедренный. DM — его медиана, а следовательно и высота. Таким образом, $BC \perp MD$.

Таким образом, BC перпендикулярна пересекающимся прямым AM и MD. Значит прямая BC перпендикулярна к плоскости AMD.

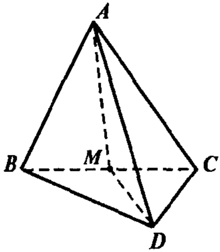


Рис. 78

№ 132. Пусть $\alpha \parallel \beta$ и $a \perp \alpha$. Докажем, что $a \perp \beta$.

Пусть прямая a пересекает плоскости α и β в точках A и B. Проведем в плоскости α прямые b и c через точку A.

Через точку B проведем прямые b' и c', параллельные прямым b и c соответственно (рис. 79). Прямые b' и c' лежат в плоскости β (см. задачу 56).

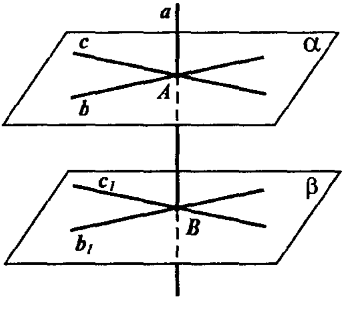


Рис. 79

Так как $a \perp \alpha$, то $a \perp c$ и $a \perp b$, тогда по лемме п. 15 следует, что $a \perp c'$ и $a \perp b'$. Но следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости следует, что $a \perp \beta$, что и требовалось доказать.

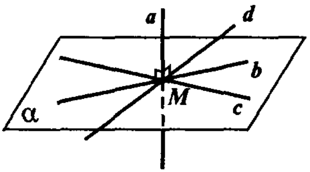


Рис. 80

№ 134. Проведем через точку M прямые $\underline{b}$ и c, перпендикулярные к прямой a. Через прямые b и c проведем плоскость . Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $a \perp \alpha$.

Докажем, что прямая d, перпендикулярная к a, лежит в плоскости α (рис. 80).

Предположим, что это не так. Проведем плоскость β через прямые a и d. Плоскость β пересекается с плоскостью α (т. к. есть общая точка M). Обозначим прямую пересечения буквой d'. Тогда, так как $d' \in \alpha$, а $a \perp \alpha$, то $a \perp d'$.

Но таким образом, в плоскости β есть две прямые d и d', проходящие через точку M , перпендикулярные к прямой a. Но это невозможно. Значит прямая d лежит в плоскости α.

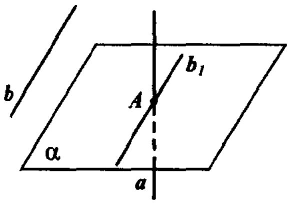


Рис. 81

№ 135. Обозначим точку пересечения прямой a и плоскости α буквой A. Проведем через точку A прямую b', параллельную прямой b. Тогда $a \perp b'$ (рис. 81)

По задаче 134 следует, что b' лежит в плоскости α. Таким образом $b \parallel b'$ и $b' \in \alpha$, следовательно $b \parallel \alpha$.

№ 136. Заметим, что точка X лежит на середине перпендикуляра OX к AB. Но прямая OX лежит в плоскости, перпендикулярной к отрезку AB и проходящей через точку O (по задаче 134).

Значит и точка X лежит в этой плоскости.

№ 137. Обозначим наши прямые a и b. Докажем, что через прямую a проходит плоскостью α, такая что $b \perp \alpha$.

Возьмем точку M на прямой a и проведем через точку M прямую c, такую что $c \parallel b$. Тогда, т. к. $b \parallel c$ и $b \perp a$, следует из леммы п. 15, что $c \perp a$ (рис. 82).

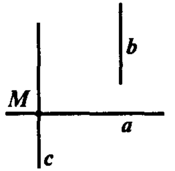


Рис. 82

Значит прямая a лежит в некоторой плоскости, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой c. Назовем эту плоскостью α.

Докажем, что $b \perp \alpha$. Действительно, т. к. $b \parallel c$, а $c \perp \alpha$, то из теоремы п. 16 следует, что $b \perp \alpha$.

§ 2. Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью

№ 138. а) Обозначим данную точку A. Основание перпендикуляра B. Основание наклонной C (рис.83).

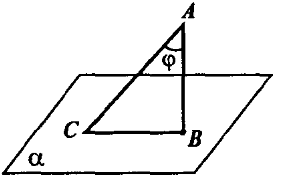


Рис. 83

Тогда угол $\angle CAB = \varphi$, а $\angle ABC = 90°$, т. к. $AB \perp \alpha$, следовательно $AB \perp AC$, т. е. $\triangle ABC$ — прямоугольный .

$$AC = \frac{AB}{\cos\varphi} = \frac{d}{\cos\varphi}; \; BC = \mathrm{tg}\varphi \cdot AB$$

б) $AB = m \cdot \cos\varphi$; $BC = m \cdot \sin\varphi$.

№ 139. а) Обозначим наклонные AB и AD, а перпендикуляр AC (рис. 84).

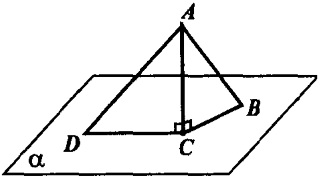


Рис. 84

Тогда $AC \perp CB$ и $AC \perp CD$. Тогда $\triangle ACB$ и $\triangle ACD$ прямоугольные.

$AB = AD$, AC — общая сторона $\triangle ACD$ и $\triangle ACB$.

Следовательно, по признаку равенства прямоугольных треугольников (по катету и гипотенузе) $\triangle ADC = \triangle ABC$, $DC = CB$.

б) Аналогично п. а).

в) Предположим, что $AB > AD$. Тогда

$BC^2 = AB^2 - AC^2$, $CD^2 = AD^2 - AC^2$

Так как $AB > AD$ следует, что $AB^2 > AD^2$, тогда $AB^2 - AC^2 > AD^2 - AC^2$. Значит $BC^2 > CD^2$, т. е. $BC > CD$, что и требовалось доказать.

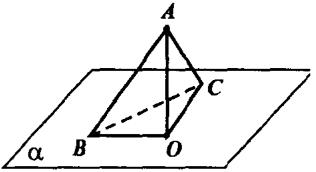


Рис. 85

№ 140. Так как $\triangle BAC$ — равнобедренный ($AB = AC$), а $\angle BAC = 60°$, то этот треугольник равносторонний. Значит, $AB = BC$. Найдем AB: $\triangle AOB$ — прямоугольный. Значит

$$AB = \frac{AO}{\cos\angle BAO} = \frac{AO}{\cos 60°}$$

$AB = 2 \cdot 1{,}5 = 3$ см, т. е. $BC = 3$ см (рис. 85).

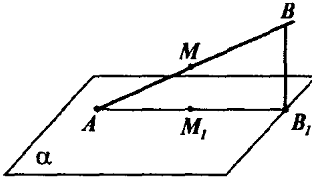


Рис. 86

№ 141. Обозначим данный отрезок AB. И пусть точка A лежит в плоскости α. Тогда $BB_1 = 6$ см, где B_1 — проекция точки B (рис.86).

Пусть точка M — середина AB, тогда $M \in AB_1$, M_1 — проекция точки M. Так как $M \in AB$ (см. п. 21). Тогда $MM_1 \parallel BB_1$, т. к. $MM_1 \perp \alpha$ и $BB_1 \perp \alpha$.

Тогда $AM : MB = AM_1 : M_1B_1 = 1 : 1$ по т. Фалеса, т. е. M_1 — середина AB_1, т. е. MM_1 — средняя линия $\triangle ABB_1$ и, следовательно, $MM_1 = \frac{1}{2} \cdot BB_1 = 3$ см.

№ 142. Указание: Доказать, что перпендикуляр CC_1, где C — середина отрезка AB, есть средняя линия трапеции ABB_1A_1. Тогда

$$CC_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1).$$

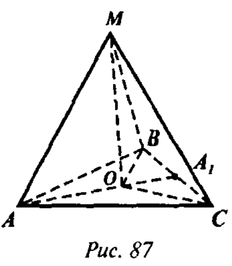


Рис. 87

№ 143. Докажем, что O проекция точки M на плоскость $\triangle ABC$. Это точка пересечения медиан $\triangle ABC$ (рис. 87).

Действительно, т. к. $MA = MB = MC$, то по задаче 139а) следует, что $OA = OB = OC$. т. к. $AB = BC = AC$, тогда $\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COA$ (по трем сторонам).

Значит $\angle ABO = \angle CBO = \angle BCO = \angle OCA = \angle OAC = \angle OAB$.

Т. е. BO, CO, AO — биссектрисы углов A, B, C треугольника ABC. Но $\triangle ABC$ — правильный, значит AO, BO, CO — медианы. Обозначим точки пересечения этих медиан с противоположными сторонами A_1, B_1, C_1 соответственно.

Рассмотрим $\triangle MBC$. MA_1 — медиана, а следовательно и высота (т. к. $MB = MC$). т. е. $MA_1 \perp BC$ и $BA_1 = \frac{1}{2} BC = 3$ см.

Значит $MA_1^2 = MB^2 - BA_1^2 = 7$, $MA_1 = \sqrt{7}$ см.
Рассмотрим $\triangle ABC$: AA_1 — медиана и высота.
$AA_1^2 = AB^2 - BA_1^2 = 27$. $AA_1 = 3\sqrt{3}$ см.
Но точка O это точка пересечения медиан, значит
$OA_1 = \frac{1}{3} AA_1 = \sqrt{3}$ см.

Тогда из $\triangle MOA_1$ следует что
$MO^2 = MA_1^2 - OA_1^2 = 7 - 3 = 4$, т. е. $MO = 2$ см.

№ 145. а) Так как $DA \perp (ABC)$, то $DA \perp CB$, но $CB \perp AC$, значит по признаку перпендикулярности прямой и плоскости CB перпендикулярна плоскости ADC, значит $CB \perp DC$, т. е. $\angle DCB = 90°$, т. е. $\triangle DCB$ — прямоугольный.

б) BD — гипотенуза $\triangle DCB$, значит $BD^2 = DC^2 + CB^2$ $BD = a^2 + b^2$.

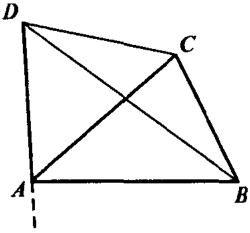


Рис. 88

№ 146. Рассмотрим прямую b, которая является проекцией прямой $\underline{a}$ на плоскость α (рис. 89).

Через точку M в плоскости α проведем прямую c, перпендикулярную к b. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $c \perp a$. Докажем единственность прямой c. Пусть существует прямая d, так что $d \in \alpha$ и $d \perp a$.

Тогда, т. к. прямые d и $\underline{c}$ пересекаются в точке M, то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости следует, что $a \perp \alpha$. Но по условию это не так. Следовательно, c — единственная такая прямая.

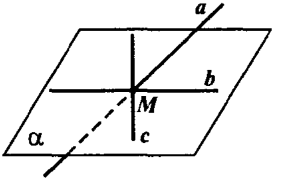


Рис. 89

№ 147. Указание: Аналогично задаче 145 доказать, что $DC \perp MBC$ и $DA \perp ABM$.

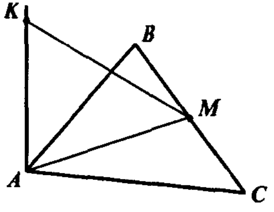


Рис. 90

№ 148. Так как $\triangle ABC$ — правильный, а AM — медиана, то AM — также и высота. Значит, $AM \perp BC$ (рис. 90).

Так как AK перпендикулярна плоскости ABC, то $AK \perp BC$.

Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости следует, что $BC \perp AKM$. Тогда $BC \perp KM$, что и требовалось доказать.

№ 149. Пусть E — середина BC. Тогда $AE \perp BC$, т. е. EA — расстояние от точки A до прямой BC.

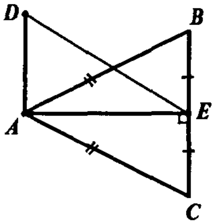


Рис. 91

Заметим, что EA — проекция DE на плоскость ABC. Значит из того, что $AE \perp BC$ следует, что $DE \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах).

Таким образом, DE — расстояние от точки D до прямой BC (рис. 91).

Найдем AE и DE:

$BE = \frac{1}{2}BC = 3$ см.

$\triangle ABE$ — прямоугольный, тогда по теореме Пифагора

$AE^2 = AB^2 - BE^2 = 25 - 9 = 16$, т. е. $AE = 4$ см.

$\triangle DAE$ — прямоугольный, т. к. $DA \perp AE$, значит $DE^2 = DA^2 + AE^2$, $DE = \sqrt{144 + 16} = 4\sqrt{10}$ см.

№ 150. а) Так как AK перпендикулярна к плоскости $ABCD$, то $AK \perp AD$ (рис. 92).

AB — проекция KB на плоскость $ABCD$. $KB \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах. По теореме Пифагора:

$BC = \sqrt{81 - 49} = 4\sqrt{2}$

$BC = AD$, т. к. $ABCD$ прямоугольник. Таким образом, $AD = 4\sqrt{2}$.

Тогда из $\triangle ADK$ по теореме Пифагора следует, что

$AK = KD^2 - AD^2$, $AK = \sqrt{36 - 32} = 2$ см.

б) Заметим, что $CD \parallel AKB$, т. к. $CD \parallel AB$. Значит, расстояние между CD и AK есть расстояние между CD и плоскостью ABK. т. е. длина перпендикуляра AD. Но $AD = 4\sqrt{2}$ (см. п. а)).

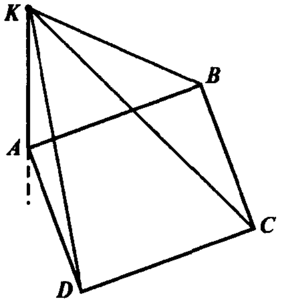


Рис. 92

№ 151. а) Возьмем произвольную точку M треугольника ADB. Построим точку M' — проекцию M на ABC. Докажем, что M' лежит в $\triangle ABC$. Действительно, т. к. $MM_1 \perp ABC$ и $DC \perp ABC$, то $MM_1 \parallel DC$ (рис. 93).

Следовательно, $MM_1 \parallel BDC$ и $MM_1 \parallel ADC$. Значит MM_1 не может пересекать грани ADC и BDC. Таким образом, она пересекает $\triangle ABC$, т. е. $M_1 \in \triangle ABC$.

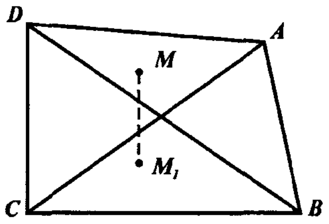


Рис. 93

Аналогично доказывается, что любая точка $\triangle ABC$ является проекцией точки треугольника ADB.

б) Если CH — высота $\triangle ABC$, то $AB \perp CH$. Но CH есть проекция DH на плоскость ABC. Тогда по теореме о трех перпендикулярах следует, что $AB \perp DH$. Таким образом, DH — высота $\triangle ADB$ (рис. 94).

№ 152. Указание: Доказать, что расстояние от точки F до диагоналей квадрата — это отрезок, соединяющий F с точкой O пересечения диагоналей квадрата, а далее аналогично задаче 150.

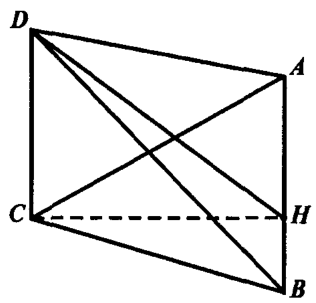


Рис. 94

№ 154. Указание: Аналогично задаче 149.

№ 155. Указание: Так как $\angle C = 90°$, то это угол при вершине равнобедренного треугольника. Значит $AC = CB$. По теореме Пифагора найти AB и далее аналогично задаче 149.

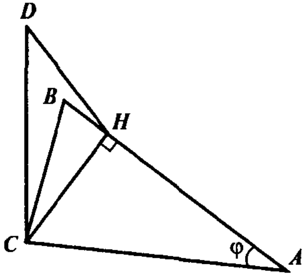


Рис. 95

№ 156. Пусть $AC = m$ и $\angle BAC = \varphi$. Проведем высоту CH в $\triangle ABC$. $AB \perp CH$. Тогда CH — проекция DH, следовательно по теореме о трех перпендикулярах $AB \perp DH$. Таким образом, длина DH и есть расстояние от точки D до прямой AB. Найдем DH (рис. 95).

Рассмотрим $\triangle ACH$: $\angle AHC = 90°$, $\angle HAC = \varphi$, $AC = m$. Тогда из $\triangle DHC$ по теореме Пифагора (т. к. $DC \perp CH$, т. е. $\angle C = 90°$)

$$DH^2 = DC^2 + CH^2 = n^2 + m^2 \cdot \sin^2\varphi, \text{ т. е. } DH = \sqrt{n^2 + m^2 \cdot \sin^2\varphi}$$

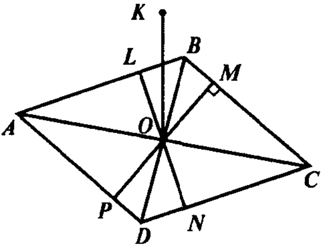


Рис. 96

№ 157. а) Проведем высоты OL, OM, ON, OP треугольников OAB, OBC, OCD, ODA соответственно.

OL — является проекцией KL на плоскость $ABCD$, т. к. $OL \perp AB$, то, по теореме о трех перпендикулярах, $KL \perp AB$ и следовательно длина KL есть расстояние от точки K до прямой AB.

Аналогично KM, KN, KP — расстояния от точки K до прямых BC, CD, DA соответственно.

$\triangle OKL$ — прямоугольный (т. к. $KO \perp ABCD$, то $KO \perp OL$), значит $KL = \sqrt{OK^2 + OL^2}$, аналогично $KM = \sqrt{KO^2 + OL^2}$, $KN = \sqrt{KO^2 + ON^2}$, $KP = \sqrt{KO^2 + OP^2}$.

Но заметим, что $\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COD = \triangle DOA$ по трем сторонам (т. к. диагонали точкой пересечения делятся пополам и $AB = BC = CD = AD$, т. к. $ABCD$ — ромб). Следовательно, и высоты этих треугольников равны

$OM = OL = ON = OP$. Тогда $KL = KM = KN = KP$.

б) Чтобы найти это расстояние, надо найти OL. Рассмотрим $\triangle AOB$:

$AO = \frac{1}{2}AC = 3$ дм, $BO = \frac{1}{2}BD = 4$ дм.

$\angle BOA = 90°$, т. к. диагонали ромба перпендикулярны. По теореме Пифагора

$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2}$

$AB = \sqrt{9 + 16} = 25 = 5$ дм.

Тогда $\sin \angle ABO = \frac{3}{5}$.

Рассмотрим $\triangle OLB$: В нем

$\sin \angle LBO = \frac{OL}{OB}$.

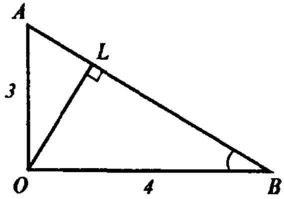


Рис. 97

Значит $OL = \sin \angle LBO \cdot OB$. Таким образом, $OL = \frac{3}{5} \cdot 4 = \frac{12}{5}$.

Тогда $KL = \sqrt{OK^2 + OL^2} = \sqrt{4{,}5^2 + 2{,}4^2} = \sqrt{25{,}01} = 5{,}1$.

$KL = KM = KN = KP = 5{,}1$ дм

№ 158. Проведем высоту BH в треугольнике ABD. Заметим, что H попадает на AD, т. к. ABD — равносторонний, т. к. $\angle A = 60°$ и $AB = AD$ (рис. 98).

Из этого треугольника найдем BH:

$\sin \angle BAH = \frac{BH}{AB}$, следовательно

$BH = \sin 60° \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 25$.

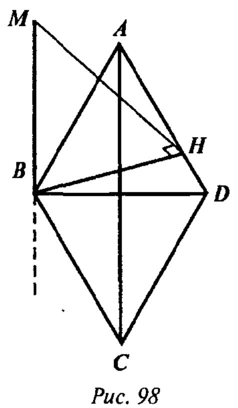


Рис. 98

Так как BH является проекцией MH и $BH \perp AD$, то из теоремы о трех перпендикулярах следует, что $MH \perp AD$.

Таким образом MH — есть расстояние от точки M до прямой AD.

В $\triangle MBH$ $\angle MBH = 90°$. Значит по теореме Пифагора

$$MH = \sqrt{MB^2 + BH^2} = \sqrt{12{,}5^2 + \frac{3}{4} \cdot 25^2} = 25 \text{ см}.$$

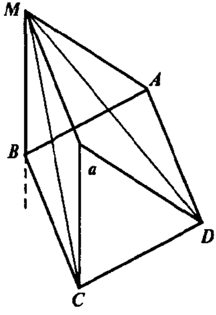


Рис. 99

№ 159. Пусть прямая, по которой пересекаются плоскости ADM и BCM это прямая a (рис. 99).

Так как $BC \parallel AD$, следовательно, $BC \parallel AMD$ и т. к. прямая BC лежит в плоскости BMC, то прямая a параллельна BC (утв. 1°, п. 6). Таким образом, $a \parallel BC$, $a \parallel AD$.

Так как $BC \perp AB$ ($ABCD$ — прямоугольник) и $BC \perp MB$ (т. к. $MB \perp ABCD$), то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости следует, что $BC \perp AMB$.

Следовательно, $a \perp AMB$ (по теореме п. 16).

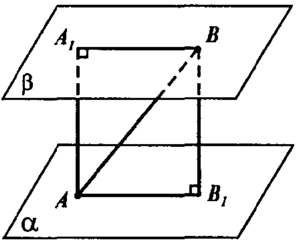


Рис. 100

№ 160. Пусть даны плоскости α и β и точка A лежит на плоскости α, а точка B лежит на плоскости β (рис. 100).

Рассмотрим проекции AB_1 и BA_1 отрезка AB на плоскости α и β соответственно.

$AA_1 \perp \beta$ и $BB_1 \perp \alpha$. Значит, т. к. расстояние между плоскостями равно d, то $AA_1 = BB_1 = d$.

Тогда $\triangle AA_1B$ и $\triangle BB_1A$ равны по катету и гипотенузе ($AA_1 = BB_1$ и AB — общая сторона).

Следовательно, $BA_1 = AB_1$, что и требовалось доказать.

$$AB_1 = \sqrt{AB^2 - BB_1^2} = \sqrt{169 - 25} = 12 \text{ см}.$$

№ 161. Так как $\angle ABC < 90°$, то прямая AB не перпендикулярна плоскости BCD, значит ее проекцией будет прямая BA_1 (рис. 101).

Проведем прямые AF и AG, перпендикулярные к BC и BD. Тогда A_1F проекция AF, а A_1G проекция AG на плоскость BCD соответственно. Значит по теореме о трех перпендикулярах $AB \perp BF$, а $AG \perp BG$.

Таким образом, $\triangle BFA$ и $\triangle BGA$ — прямоугольные.

Но $\angle ABC = \angle ABD$ и у этих треугольников общая гипотенуза AB. Таким образом, по признаку равенства прямоугольных треугольников $\triangle ABC = \triangle ABD$.

Тогда $A_1F = A_1G$.

Аналогично доказывается, что любая точка, являющаяся проекцией точкой прямой BA, равноудалена от прямых BC и BD, а следовательно, лежит на биссектрисе угла CBD. Т. е. проекция AB и является биссектрисой $\angle CBD$.

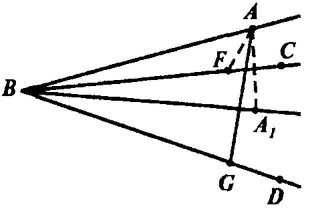


Рис. 101

№ 163. Пусть проекция точки A — это A_1. Тогда AA_1 перпендикулярна к данной плоскости. В частности $AA_1 \perp A_1M$. Таким образом, $\triangle AMA_1$ — прямоугольный и $\angle AMA_1 = \varphi$. Это и есть угол между прямой AM и плоскостью. (рис. 102)

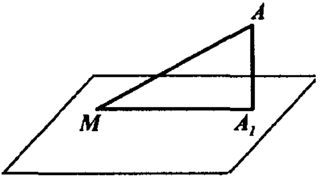


Рис. 102

а) $\varphi = 45°$, тогда

$$A_1M = \cos 45° \cdot AM = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot d.$$

б, в) Аналогично п. а).

№ 164. Указание: Найти $\cos\varphi$.

№ 165. Пусть проекция точки A это точка O. Тогда OB и OC — проекции AB и AC соответственно. Таким образом, $\angle ABO = \angle ACO = 30°$ (по условию).

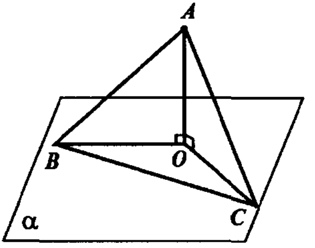


Рис. 103

Тогда $\triangle ABO = \triangle ACO$, т. к. эти треугольники прямоугольные и они равны по катету и острому углу.

Тогда $OB = OC$.

Таким образом, $\triangle BOC$ — равнобедренный. Причем

$OB = \operatorname{ctg} \angle ABO \cdot AO = 3 \cdot d = OC$.

Найдем BC по теореме косинусов:

$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB \cdot OC \cdot \cos \angle BOC$

$BC^2 = 3d^2 + 3\,d^2 - 2 \cdot 3d^2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 9d^2$. Таким образом, $BC = 3d$.

§ 3. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей

№ 166. Точка C — это проекция точки A на плоскость α. Таким образом, CB — проекция AB на плоскость α. Так как $AB \perp MN$, то по обратной теореме о трех перпендикулярах $CB \perp MN$. Но это и означает, что CBA — линейный угол двухгранного угла $CMNA$ (рис. 104).

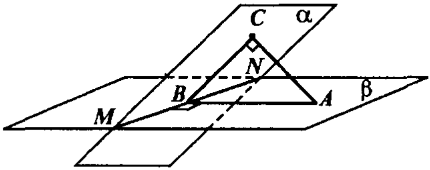


Рис. 104

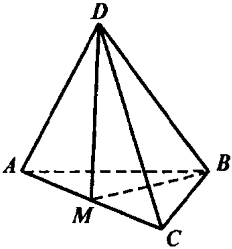


Рис. 105

№ 167. Так как $\triangle DAC$ — равносторонний, значит медиана DM является высотой $MD \perp AC$.

Аналогично $BM \perp AC$. Таким образом, $\angle BMD$ — линейный угол двухгранного угла $BACD$ (рис. 105).

№ 168. Пусть грани двугранного угла — это α и β. Данная точка — это точка A и лежит в грани α.

Проведем перпендикуляр AC к грани β. Тогда $AC = d$.

Проведем перпендикуляр AB к ребру двугранного угла. Тогда AB и есть расстояние от точки A до ребра двугранного угла.

По задаче 166 $\angle ABC$ — линейный угол двугранного угла. Таким образом $\triangle ABC = \varphi$. Тогда, так как $\angle ACB = 90^\circ$, то $AB = \dfrac{d}{\sin\varphi}$.

№ 169. Обозначим общее ребро MN. Общая грань пусть будет MNB, а остальные грани MNA и MNC (рис. 106).

Возьмем точку F на прямой MN и проведем перпендикуляры FP, FR, FS в гранях MNA, MNB, MNC.

Так как прямые FP и FS лежат в одной плоскости $AMNC$, то F, S, P лежат на одной прямой, перпендикулярной к MN. Тогда $\angle RFP$ и $\angle RFS$ — линейные углы двугранных углов $BMNA$ и $BMNC$ соответственно.

Но $\angle RFS + \angle RFP = 180°$, следовательно и сумма двугранных углов равна 180°.

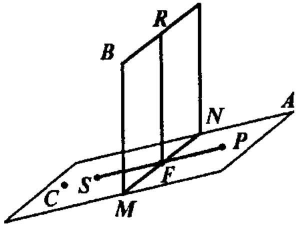


Рис. 106

№ 170. Проведем прямую BH, перпендикулярную к AC. Точка H лежит на прямой AC (рис. 107). Тогда HB_1 проекция HB на плоскость α. Таким образом $\triangle BHA$ прямоугольный ($\angle BHA = 90°$). Так как $\angle BAC = 150°$, то $\angle BAH = 30°$. Тогда

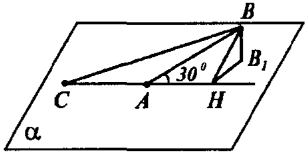


Рис. 107

$$BH = \sin \angle BAH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \text{ см}.$$

Так как $AH \perp BH$, то по теореме о трех перпендикулярах следует, что $B_1H \perp AH$. Таким образом, $\angle BHB_1$ — линейный угол двугранного угла $BACB_1$. Таким образом $\angle BHB_1 = 45°$. $\angle BHB_1$ — прямоугольный ($\angle BB_1H = 90°$), поэтому

$$BB_1 = \sin \angle BHB_1 \cdot BH = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ см}.$$

Таким образом, от точки B до плоскости α — $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см, а расстояние от точки B до прямой AC — 1 см.

№ 171. Обозначим данный треугольник ABD, где $\angle A = 90°$, а проекцию точки A на плоскость α, за точку C. Проведем высоту AH треугольника BAD. Так как $\triangle BAD$ равнобедренный, то H — середина BD (рис. 108).

Тогда CH проекция AH на плоскость α и по теореме о трех перпендикулярах $CH \perp BD$ (т. к. $AH \perp BD$). Таким образом $\angle AHC$ — искомый угол.

Так как $AC \perp \alpha$, то $AC \perp BC$. Таким образом $\triangle ABC$ — прямоугольный и т. к. BC — это проекция BA на плоскостью α, то $\angle ABC = 30°$.

Обозначим AB за a, т. е. $AB = a$.

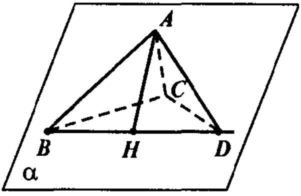


Рис. 108

Тогда $BC = a \cdot \cos \angle ABC = \frac{\sqrt{3}}{2}a$,

$AC = \sin 30° \cdot a = \frac{a}{2}$. Тогда из $\triangle ABD$

$BD = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$.

Значит $BH = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Так как $CH \perp BD$, то $\triangle BCH$ — прямоугольный, тогда $CH^2 = BC^2 - BH^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{2}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$. Таким образом, $CH = \frac{a}{2}$.

Значит в $\triangle AHC$: $\angle C = 90°$ и $AC = CH = \frac{a}{2}$.
Таким образом, $\angle AHC = 45°$.

№ 172. Пусть точка B_1 — проекция точки B на плоскость α. Тогда CB_1 — проекция CB на плоскость α (рис. 109).

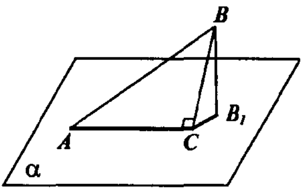


Рис. 109

Но $CB \perp AC$ (т. к. $\angle ACB = 90°$). Следовательно, $CB_1 \perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах). Значит $\angle BCB_1$ — угол между плоскостями ABC и α. Таким образом $\angle BCB_1 = 60°$. Заметим, что так как $BB_1 \perp \alpha$, то $\angle BB_1C = 90°$. Поэтому

$B_1B = BC \cdot \sin \angle BCB_1$.

$\triangle ABC$ — прямоугольный, поэтому по теореме Пифагора

$BC^2 = AB^2 - AC^2 = 169 - 25 = 144$ $BC = 12$ см.

Отсюда $BB_1 = 12 \cdot \sin 60° = 6\sqrt{3}$ см.

№ 173. Плоскость DAC перпендикулярна к плоскости ABC, т. к. она проходит через прямую DC, перпендикулярную к ABC (по теореме п. 23) (рис. 110). Поэтому двугранный угол $DACB$ равен 90°.

Заметим, что $\triangle BDC$ и $\triangle ADC$ — прямоугольные (т. к. $DC \perp BC$ и $DC \perp AC$), и $AC = BC$, а катет DC — общий. Поэтому эти треугольники равны. Следовательно, $AD = BD$.

Проведем медиану CH в $\triangle ACB$. Так как $\triangle ABC$ — правильный, то CH является высотой $CH \perp AB$. Но DH — медиана, а следовательно, и высота равнобедренного треугольника ADB. Поэтому $DH \perp AB$.

Значит $\angle DHC$ — линейный угол двугранного угла $DABC$. Найдем DC из $\triangle BDC$:

$DC^2 = DB^2 - BC^2 = 9 \cdot 7 - 36 = 27.$

$DC = 3\sqrt{3}.$

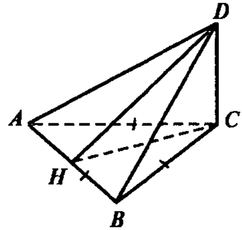


Рис. 110

Найдем DH из $\triangle DBH$: $\angle DHB = 90°$ и $BH = \frac{1}{2}AB = 3$. Таким образом $DH^2 = DB^2 - HB^2 = 63 - 9 = 54$, $DH = 3\sqrt{6}$. Тогда из $\triangle DHC$: $\sin \angle DHC = \frac{DC}{DH} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Значит $\angle DHC = 45°$.

Линейный угол двугранного угла $BDCA$ — это $\angle ACB$, т. к. $BC \perp DC$ и $AC \perp DC$ (т. к. DC перпендикулярна к плоскости ABC), но $\angle ACB = 60°$, т. к. $\triangle ABC$ — правильный.

№ 174. Так как $DA \perp AC$ и $DA \perp AB$, то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $DA \perp ABC$. Поэтому AC проекция DC на плоскость ABC (рис. 111). Тогда по теореме о трех перпендикулярах из того, что $AC \perp BC$ следует, что $DC \perp BC$.

Таким образом $\angle ACD$ — линейный угол двугранного угла $ABCD$. Найдем CD из $\triangle BDC$:

$CD^2 = BD^2 - BC^2 = 125 - 25 = 100.$

$CD = 10.$

Тогда $\cos \angle ACD = \frac{AC}{CD} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$,

следовательно $\angle ACD = 60°$.

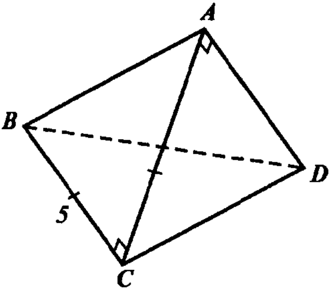


Рис. 111

№ 175. Указание: Воспользовавшись задачей 167, доказать, что треугольники, которые возникают при том построении равны, а следовательно и равны углы.

№ 176. Проведем высоту BH ромба $ABCD$. Так как $ABCD$ ромб, то точка H попадет на сторону AD (рис. 112).

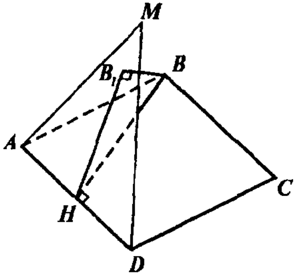


Рис. 112

Проведем BB_1 перпендикуляр к плоскости MAD. Тогда B_1H — проекция BH на плоскость MAB.

Так как $BH \perp AD$, то по теореме о трех перпендикулярах $B_1H \perp AD$. Значит $\angle B_1HB$ — линейный угол двугранного угла $MADB$. Таким образом $\angle B_1HB = 60°$. Так как $BB_1 = 4\sqrt{3}$, то

$$BH = \frac{BB_1}{\sin\angle B_1HB} = \frac{4\sqrt{3}\cdot 2}{\sqrt{3}} = 8.$$

Тогда

$$AB = \frac{BH}{\sin\angle BAD} = 8 : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{16}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}.$$

Таким образом $AB = 8\sqrt{2}$.

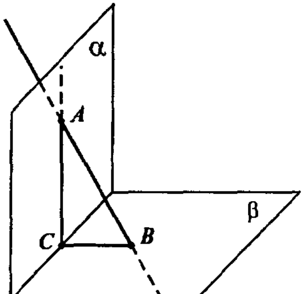


Рис. 113

№ 177. Указание: Воспользоваться теоремой п. 23, заметив, что две данные плоскости проходят через данную прямую, перпендикулярную к третьей плоскости.

№ 179. Предположим, что эта прямая a не лежит в плоскости α. Таким образом a пересекает плоскость α в точке A, а плоскость β в точке B (рис. 113).

Проведем в плоскости α прямую AC, перпендикулярную к прямой пересечения плоскостей α и β. Точка C лежит на прямой пересечения плоскостей. Тогда по задаче 178 $AC \perp \beta$. Значит $AC \perp CB$. Но $AB \perp \beta$, значит $AB \perp BC$.

Тогда в $\triangle ABC$ есть два прямых угла, что невозможно. Значит, наше предположение неверно. Таким образом прямая a лежит в плоскости α.

№ 180. Пусть плоскость α и прямая a перпендикулярны к плоскости β. Докажем, что $a \parallel \alpha$.

Проведем в плоскости α прямую b, перпендикулярную к прямой пересечения плоскостей α и β. По задаче 178 следует, что $b \perp \beta$ (рис. 114).

Таким образом $a \perp \beta$, $b \perp \beta$. Отсюда следует, что $a \parallel b$ (по обратной теореме п. 16).

И так как b лежит в плоскости α, а a не лежит в этой плоскости то $a \parallel \alpha$.

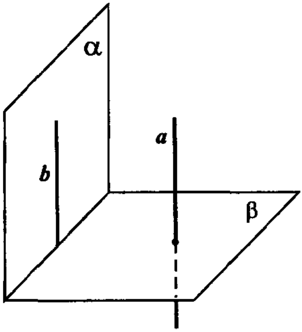


Рис. 114

№ 181. Так как $MB \perp \beta$, то $MB \perp a$. Так как $MA \perp \alpha$, то $MA \perp a$ (рис. 115).

Тогда a перпендикулярна к плоскости AMB (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). И значит $a \perp MC$, т. к. прямая MC лежит в плоскости AMB.

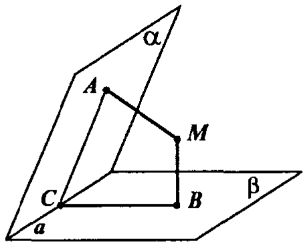


Рис. 115

№ 182. а) Аналогично задаче 181

$a \perp MABC$. Тогда $a \perp AC$ и $a \perp CB$, значит $\angle ACB$ есть линейный угол двугранного угла между плоскостями α и β. Таким образом $\angle ACB = 90°$. Значит $AC \perp CB$ и $AC \perp a$.

Таким образом $AC \perp \beta$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

Но тогда, из того, что $AC \perp \beta$ и $MB \perp \beta$, следует, что $AC \parallel MB$.

Аналогично $MA \parallel CB$. Значит $MACB$ — параллелограмм и $\angle ACB = 90°$. *Значит* $MACB$ — прямоугольник.

б) Расстояние от M до прямой a это MC (т. к. $MC \perp a$ по задаче 181). По теореме Пифагора

$$MC^2 = CB^2 + BM^2 = AM^2 + BM^2 = m^2 + n^2.$$

№ 183. Возьмем точку M плоскости γ. Проведем перпендикуляр MA к плоскости α. Тогда по задаче 179 прямая MA лежит в плоскости γ.

Аналогично, перпендикуляр MB к плоскости β лежит в плоскости γ.

Но так как MA и MB перпендикуляры к плоскостям α и β, то $MA \perp a$ и $MB \perp a$, т. к. прямая a лежит в обеих плоскостях. Прямые MA и MB являются пересекающимися прямыми плоскости γ. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости следует, что $a \perp \gamma$.

№ 184. Указание: Доказать, что $\angle CMD$ (где M — середина AB) это линейный угол двугранного угла $CABD$. И по теореме Пифагора из $\triangle CMD$ найди гипотенузу CD.

№ 187. а) По теореме п. 24 квадрат диагонали равен $d^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$, таким образом $d = \sqrt{6}$

б) $d^2 = 8^2 + 9^2 + 12^2$, $d = 17$

в) $d^2 = 39 + 7^2 + 9^2$, $d = 13$

№ 188. По теореме п. 24 $d^2 = a^2 + a^2 + a^2$, $d = a\sqrt{3}$.

№ 189. Указание: Расстояние от вершины куба до плоскости грани — это длина ребра куба, которая находится из:

а) теоремы Пифагора; б) теоремы п. 24.

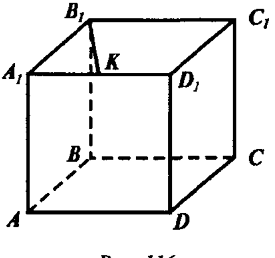


Рис. 116

№ 190. а) Общее ребро двух полуплоскостей это BB_1 (рис. 116).

Но $AB \perp BB_1$ и $CB \perp BB_1$. Поэтому $\angle ABC$ — линейный угол двугранного угла ABB_1C. $\angle ABC = 90°$.

б) $AD \perp DD_1$ и $BD \perp DD_1$ (т. к. $DD_1 \perp ABCD$). Значит $\angle ADB$ — линейный угол двугранного угла ADD_1B.

в) Аналогично $A_1B_1 \perp BB_1$ и $B_1K \perp BB_1$. Поэтому $\angle A_1B_1K$ — линейный угол двугранного угла ABB_1K. Найдем $\operatorname{tg} \angle A_1B_1K = \dfrac{A_1K}{A_1B_1} = \dfrac{1}{2}$.

№ 191. Прямая AD_1 лежит в плоскости ABC, т. к. $AD_1 \parallel BC_1$ и точка A лежит в плоскости ABC_1. Докажем, что прямая AD_1 перпендикулярна плоскости A_1B_1D. $AD_1 \perp A_1D$, т. к. это диагонали квадрата AA_1D_1D (рис. 117).

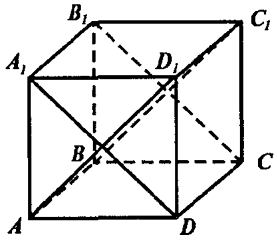


Рис. 117

Так как $AA_1 \perp A_1B_1$ и AA_1 — проекция AD_1 на плоскость AA_1B_1B, то по теореме о трех перпендикулярах $AD_1 \perp A_1B_1$. Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости следует, что $AD_1 \perp A_1B_1D$.

По теореме п. 23 следует, что плоскости ABC и A_1B_1D перпендикулярны.

№ 192. Найдем угол между DB_1 и плоскостью $ABCD$ (рис. 118).

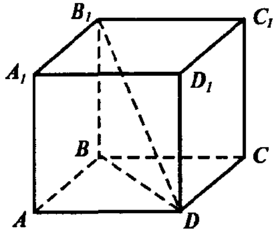


Рис. 118

Так как $BB_1 \perp ABC$, то BD — проекция B_1D на плоскость $ABCD$.

Тогда $\angle B_1DB$ и есть искомый угол.

$$\operatorname{tg} \angle B_1DB = \frac{BB_1}{BD} = \frac{BB_1}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} =$$

$$= \frac{BB_1}{\sqrt{BB_1^{\,2} + BB_1^{\,2}}} = \frac{BB_1}{BB_1\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

№ 193. а) Так как AA_1C_1C — параллелограмм ($AA_1 \parallel CC_1$ и $AA_1 = CC_1$), то $A_1C_1 \parallel AC$. Поэтому прямая A_1C_1 параллельна плоскости ABC (рис. 119).

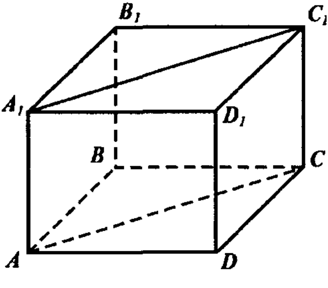


Рис. 119

Значит расстояние от прямой A_1C_1 до плоскости ABC это расстояние от точки A_1 до плоскости ABC. Но это длина A_1A, т. к. $A_1A \perp ABC$.

Так как $ABCDA_1A_1B_1C_1D_1$ прямоугольный параллелепипед, то $D_1B = AC_1$ и $A_1A = C_1C$.

Значит $AC_1^{\,2} = AD^2 + AB^2 + AA_1^{\,2}$.

А так как $AC^2 = m^2 = AD^2 + AB^2$, то $d^2 = m^2 + AA_1^{\,2}$ $AA_1 = \sqrt{d^2 - m^2}$

Таким образом расстояние от прямой A_1C_1 до плоскости ABC равно $\sqrt{d^2 - m^2}$.

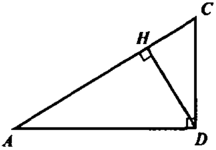


Рис. 120

б) Аналогично п. а).

в) Прямая $DD_1 \parallel CC_1$. Поэтому прямая DD_1 параллельна плоскости ACC_1. Найдем расстояние от точки D до плоскости ACC.

Рассмотрим $\triangle ADC$: $\angle D = 90°$, $AC = m$, $CD = n$ (по условию). Тогда по теореме Пифагора

$$AD = \sqrt{m^2 - n^2}.$$

Проведем высоту DH (рис. 120). $DH \perp AC$ и $DH \perp AA_1$, т. к. AA_1 перпендикулярна плоскости $ABCD$. Значит, DH перпендикулярна плоскости ACC_1, т. е. DH расстояние от точки D до плоскости ACC_1.

Найдем DH: $\angle CAD = \frac{CD}{AC} = \frac{DH}{AD}$.

Отсюда $DH = \frac{CD \cdot AD}{AC} = \frac{n \cdot \sqrt{m^2 - n^2}}{m^2}$.

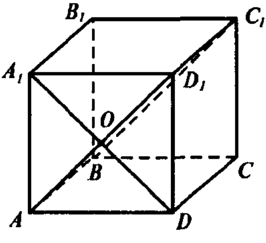


Рис. 121

№ 194. а) Найдем расстояние между BD_1 и CD. Построим сечение плоскостью, проходящей через BD_1 и параллельно CD (рис. 121).

Проведем через точку B прямую параллельно CD. Это будет BA. Также через точку D_1 прямую параллельно CD.

Тогда ABC_1D_1 — искомое сечение. Тогда $CD \parallel ABC_1D_1$ и BD_1 лежит в плоскости ABC_1D_1. Таким образом надо найди расстояние от CD до плоскости ABC_1D_1, в частности, найдем расстояние от точки D до плоскости ABC_1D_1.

Так как $DA_1 \perp AD_1$ (т. к. AA_1D_1D — квадрат) и $DA_1 \perp AB$ (т. к. $AB \perp AA_1D_1D$), то $DA_1 \perp ABC_1D_1$. Значит DO расстояние от точки D до плоскости ABC_1D_1 (рис. 121).

$$DO = \frac{1}{2} DA_1 = \frac{1}{2}\sqrt{AA_1^{\,2} + AD^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

б) Будем искать расстояние между B_1D и CD_1.

Построим сечение плоскостью, параллельной CD_1 и проходящей через B_1D.

Прямая пересечения плоскости сечения и плоскости CC_1D_1D параллельна CD_1 (по утв. 1° п. 6). Поэтому проведем прямую DC_2 в плоскости CC_1D_1D, и эта прямая лежит в плоскости сечения. Тогда прямая C_2B_1 тоже лежит в плоскости сечения и пересекает BC в точке M (рис. 122).

И так как $C_2C = CC_1$, то $CM = \frac{1}{2}CB$, т. е. M — середина CB. В плоскости $A_1B_1C_1D_1$ проведем прямую $B_1N \parallel DM$. Тогда DNB_1M искомое сечение.

Таким образом CD_1 параллельна проекции DNB_1M. Отметим точку K — середину B_1C_1. Тогда $D_1K \parallel NB_1$ и т. к. $CK \parallel MB_1$, то плоскости DNB_1M и CD_1K параллельны.

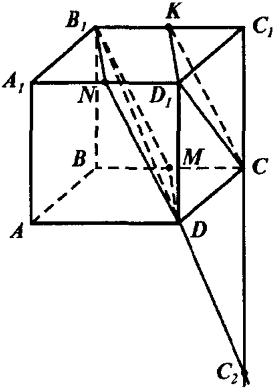


Рис. 122

Чтобы найти расстояние между прямыми CD_1 и B_1D надо найти расстояние между этими параллельными плоскостями.

Проведем перпендикуляр C_1H к плоскости CD_1K. Тогда эта прямая также перпендикулярна к DNB_1M и пересекает ее в точке H_2. Тогда $C_1H_1 \perp H_1K$ и $C_1H_2 \perp H_2B_1$ (см. рис. 123).

Т. о. $\triangle C_1H_1K \sim \triangle C_1H_2B_1$. Откуда из того, что $C_1K = KB_1$ следует $C_1H_1 = H_1H_2$.

Найдем C_1H_1. C_1H_1 — высота тетраэдра C_1KD_1C, в котором стороны легко ищутся.

$C_1D_1 = a = C_1C$, $C_1K = \frac{1}{2}a$. По теореме Пифагора

$$CK = \sqrt{CC_1^{\,2} + C_1K^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

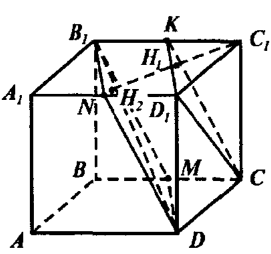


Рис. 123

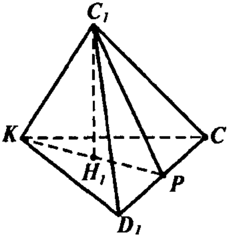


Рис. 124

$$CD_1 = \sqrt{2}a,\ D_1K = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Нарисуем этот тетраэдр отдельно (рис. 124). $CK = D_1K$, $CC_1 = C_1D$.

Поэтому $\triangle CD_1K$ и $\triangle CC_1D$ — равнобедренные. Поэтому C_1P и KP — высоты треугольников CC_1D_1 и CKD_1, где P — середина D_1C.

H_1P — проекция C_1P на плоскость CKD_1 и по теореме о трех перпендикулярах $H_1P \perp CD_1$. Но тогда точка H_1 попадает на KP, т. е. C_1H_1 — высота $\triangle KC_1P$. Найдем C_1P: $\triangle C_1PC$ — прямоугольный, значит

$$C_1P = \sqrt{CC_1^{\,2} - CP^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Аналогично $KP = \sqrt{KC^2 - CP^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Найдем высоту C_1H_1 в $\triangle C_1KP$. Обозначим $KH_1 = x$, тогда $H_1P = \frac{a\sqrt{3}}{2} - x$. Тогда $C_1H_1^2 = C_1K^2 - KH_1^{\,2} = C_1P^2 - PH_1^{\,2}$, откуда $\frac{a^2}{4} - x^2 = \frac{2a^2}{4} - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - x\right)^2$. Значит $\frac{a^2}{4} - x^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2 \cdot 3}{4} + ax\sqrt{3} - x^2$.

Откуда $ax\sqrt{3} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{3}{4}a^2$.

Значит $x = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $x = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Тогда $C_1H_1 = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}} = \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Значит расстояние между диагональю куба и диагональю грани куба равно $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

№ 195. Указание: Воспользоваться тем, что: 1) Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны, поэтому $B_1D = 12$ см. 2) Угол между B_1D и гранью — это $\angle B_1DA_1$. Откуда находятся AA_1 и AD. AB находится из теоремы п. 24.

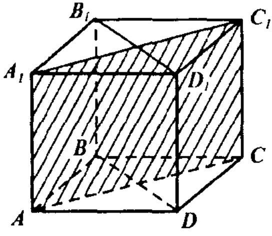


Рис. 125

№ 196. а) $A_1C_1 \perp B_1D_1$ (т. к. $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат) и $A_1C_1 \perp BB_1$.

Проведем плоскость через AA_1 и A_1C_1. Это и есть искомая плоскость, так как она проходит через прямую A_1C_1, перпендикулярную к плоскости BB_1D_1.

Поэтому искомое сечение AA_1C_1C (рис. 125).

б) Аналогично п. а).

Вопросы к главе II

1. Нет, неверно. Они могут лежать в разных плоскостях, но если они лежат в одной плоскости, то они параллельны.

2. а) Да, верно. б) Нет, прямая a может лежать в α.

3. Нет, так как иначе $b \perp \alpha$.

4. Верно, т. к. прямая b перпендикулярна любой прямой плоскости α, а значит и прямой параллельной прямой a.

5. Да, это прямая плоскости α, перпендикулярная к a.

6. Да.

7. а) Да. б) Да, например, пол и две смежные стены.

8. Да, см. 7

9. Вторая диагональ параллельна этой плоскости.

10. а) 6. б) 12.

Дополнительные задачи

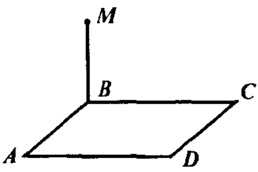


Рис. 126

№ 197. Так как $MB \perp ABC$, то $BM \perp CD$ и т. к. $ABCD$ — прямоугольник, то $CD \perp BC$ (рис. 126).

По признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая CD перпендикулярна плоскости MBC.

№ 198. Пусть точка B_1 — проекция точки B, а точка M_1 — проекция точки M на плоскостью α (рис. 127). Тогда $MM_1 \perp BB_1$, и значит

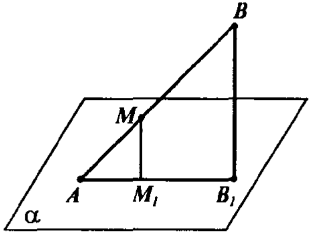


Рис. 127

$\angle AM_1M = \angle AB_1B$ и $\angle AMM_1 = \angle ABB_1$. Следовательно, треугольники $\triangle AMM_1$ и $\triangle ABB_1$ подобны. Тогда так как $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{4}{9}$, то $\dfrac{MM_1}{BB_1} = \dfrac{4}{9}$, откуда

$MM_1 = \dfrac{4}{9} \cdot 9 = 4$ см.

№ 199. Обозначим треугольник: $\triangle ABC$ и пусть $\angle B = 90°$. Так как $SA = SC$, то медиана SM треугольника ASC является и высотой (рис. 128).

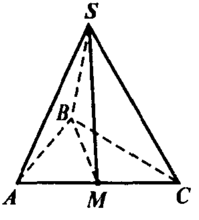


Рис. 128

Значит $SM \perp AC$. По теореме Пифагора $SC^2 = SM^2 + MC^2$

Но $SC = SB$ (по условию), а $BM = MC = AM$, так как BM — медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе.

Таким образом $SB^2 = SM^2 + BM^2$, но это означает, что $\triangle BMS$ — прямоугольный и угол $\angle SMB = 90°$.

Значит $SM \perp BM$ и так как $SM \perp AC$, то $SM \perp ABC$, что и требовалось доказать.

№ 200. Указание: Расстояния от центра описанной окружности до вершин многоугольника равны. И по теореме Пифагора утверждение следует сразу.

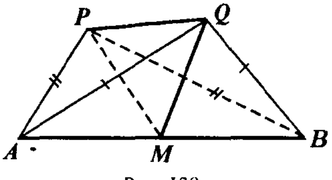


Рис. 129

№ 201. Обозначим M — середина AB (рис. 129). Тогда QM — медиана, а значит и высота равнобедренного треугольника AQB. Таким образом, $QM \perp AB$.

Аналогично $PM \perp AB$. Значит прямая AB перпендикулярна к плоскости PQM. Тогда $AB \perp PQ$. И значит угол между PQ и AB равен 90°.

№ 202. Указание: Воспользоваться задачей 199.

№ 203. Указание: Воспользоваться формулой для радиуса вписанной окружности:

$$r_{\text{впис.}} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

№ 204. а) Заметим, что по задаче 200 $MC = MA = MB$ (рис. 130). Найдем MC: $\sin \angle MCO = \frac{MO}{MC}$.

Т. о. $MC = \frac{a}{\sin\varphi}$,

$MB = MC = \frac{a}{\sin\varphi}$.

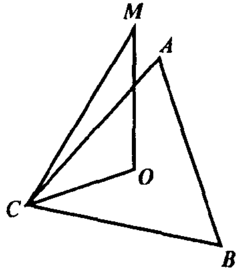


Рис. 130

б) Заметим, что OC — радиус описанной окружности. Найдем OC:

$OC = \operatorname{ctg}\varphi \cdot MO = \operatorname{ctg}\varphi \cdot a$.

Тогда длина окружности $l = 2\pi \cdot \operatorname{ctg}\varphi \cdot a$.

в) Воспользовавшись формулой площади треугольника, через радиус описанной окружности получаем $S = \frac{AB + BC + AC}{4R}$, где R — радиус описанной окружности, а AB, BC, AC находятся из теоремы синусов:

$$\frac{AB}{\sin 60^\circ} = \frac{BC}{\sin 60^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ} = 2R.$$

Тогда

$$AB = 2\operatorname{ctg}\varphi \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = BC = AC,$$

откуда

$$S = \frac{\left(a\sqrt{3}\cdot ctg\varphi\right)^3}{4actg\varphi} = \frac{3a^2\sqrt{3}\cdot ctg^2\varphi}{4}.$$

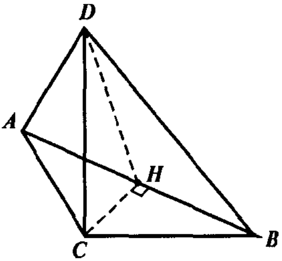


Рис. 131

№ 205. Проведем высоту CH треугольника ABC. Тогда по теореме о трех перпендикулярах из того, что CH — проекция DH на плоскостью треугольника ABC следует, что $DH \perp AB$. Таким образом DH — высота $\triangle ABD$ (рис. 131).

Найдем CH: $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{13}$ дм.

Площадь $\triangle ABC$ равна:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot CB = \frac{1}{2}\, CH \cdot AB$, откуда $CH = \frac{AC \cdot CB}{AB}$.

Таким образом $CH = \frac{6}{\sqrt{13}}$ дм.

Заметим, что $\triangle DCH$ — прямоугольный, тогда

$DH = \sqrt{DC^2 + CH^2} = \sqrt{1 + \frac{36}{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$ дм.

Тогда $S_{ABD} = \frac{1}{2}DH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{\sqrt{13}} \cdot \sqrt{13} = 3{,}5$ дм^2.

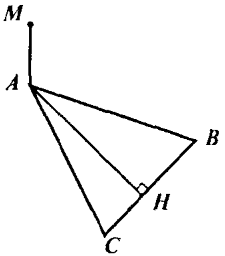


Рис. 132

№ 206. Так как против меньшего угла лежит меньшая сторона, то $BC = 8$ см. Проведем высоту AH в $\triangle ABC$ (рис. 132). Тогда по теореме о трех перпендикулярах $MH \perp BC$ (т. к. $AH \perp BC$), а следовательно, MH — расстояние от точки M до точки BC.

Найдем AH из $\triangle ABC$: пусть $AB = 17$ см, а $AC = 15$ см. Обозначим $BH = x$, тогда $CH = 8 - x$. По теореме Пифагора имеем:

$AH^2 = AC^2 - CH^2 = AB^2 - BH^2$, откуда

$17^2 - x^2 = 15^2 - (8 - x)^2$

$289 - x^2 = 225 - 64 + 16x - x^2$, значит

$16x = 128$, $x = 8$.

Таким образом $BH = 8$ см. Это означает, что $BH = BC$ и значит $AC \perp BC$, т. е. AH совпадает с AC. $AC = 15$ см. $AM = 20$ см.

Так как $\triangle MAC$ — прямоугольный, то

$MH = \sqrt{MA^2 + AH^2} = \sqrt{225 + 400} = \sqrt{625} = 25$см.

Ответ: 25 см.

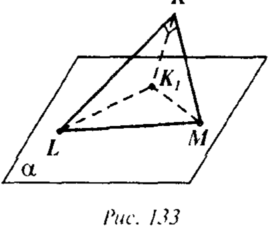


Рис. 133

№ 207. Указание: Доказать, что проекция точки M на плоскость треугольника — это центр вписанной в треугольник окружности.

№ 208. Пусть K_1 — проекция точки K на плоскость α (рис. 133).

Тогда $\angle KLK_1 = 45°$, и $\angle KMK_1 = 30°$, и $KK_1 = 9$ см.

Так как треугольники KK_1L и KK_1M прямоугольные, то

$$KL = \frac{KK_1}{\sin\angle KLK_1},\quad KM = \frac{KK_1}{\sin\angle KMK_1}.$$

Таким образом $KL = 9\sqrt{2}$ см, $KM = 18$ см.

Так как $\triangle KLM$ — прямоугольный, то по теореме Пифагора $LM = \sqrt{KL^2 + KM^2} = 9\sqrt{6}$ см.

№ 209. Построим проекции B_1 и C_1 точек B и C на плоскость α (рис. 134). Тогда

$BB_1 = AB\cdot\sin\angle BAB_1 = AB\cdot\sin 40°$

$CC_1 = AC\cdot\sin\angle CAC_1 = AC\cdot\sin 50°$.

Т. к. $\sin 40° < \sin 50°$, а $AB = AC$, то $BB_1 < CC_1$. Значит расстояние от точки B до плоскости α меньше, чем расстояние от точки C до этой плоскости.

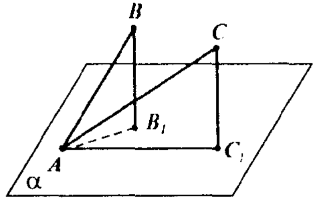


Рис. 134

№ 210. Возьмем точку C на прямой AB и построим перпендикуляры CQ_1, CP_1, CH_1 к прямой AB, лежащие в плоскостях ABQ, ABP, ABH соответственно. Эти прямые лежат в одной плоскости и $\angle Q_1CP_1 = \angle P_1CH_1$, поэтому CP_1 является биссектрисой угла Q_1CH_1. А так как расстояние от точки прямой CP_1 до плоскости ABQ есть расстояние от этой точки до прямой CQ_1 (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), то все точки прямой CP_1 равноудаленной от плоскости ABQ и ABH. Так как точка C — любая, то любая точка плоскости ABP равноудалена от плоскостей ABH и ABQ.

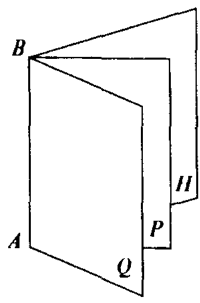


Рис. 135

№ 211. <u>Указание</u>: Воспользовавшись задачей 178 доказать, что $\triangle DMN$ — прямоугольный ($\angle M = 90°$).

№ 212. Проведем высоту CH в $\triangle ABC$ (рис. 136). Тогда, так как CH является проекцией DH на плоскость ABC, то по теореме о трех

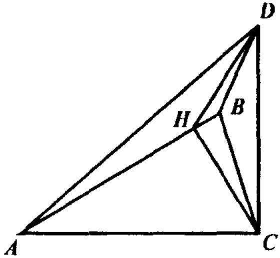


Рис. 136

перпендикулярах $DH \perp AB$, а значит DH высота $\triangle ABD$ и $\angle DHC = \alpha$, но $\triangle HDC$ — прямоугольный, поэтому $DH = \dfrac{CH}{\cos\alpha}$, $\dfrac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \dfrac{CH}{DH} = \cos\alpha.$

Значит $S_{ABD} = \dfrac{S}{\cos\alpha}$.

№ 213. Пусть D_1 — проекция точки D на плоскость ABC. Тогда D_1 — точка пересечения медиан $\triangle ABC$ (рис. 137).

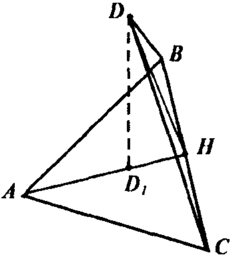


Рис. 137

Пусть H — середина BC. Тогда $\dfrac{AD_1}{D_1H} = \dfrac{2}{1}$, откуда $\dfrac{D_1H}{AH} = \dfrac{1}{3}$.

Причем $AH \perp BC$ и $DH \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах) и значит $\angle AHD$ — угол между плоскостями треугольников.

Очевидно, $DH = AH$ ($\triangle ABC = \triangle DBC$).

Значит, $\cos\angle D_1HD = \dfrac{D_1H}{DH} = \dfrac{\frac{1}{3}AH}{DH} = \dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\cos\angle D_1HD = \dfrac{1}{3}$.

№ 214. Указание: Доказать, что $\angle CBC_1$ и есть искомый угол. Далее найти $\cos\angle CBC_1$.

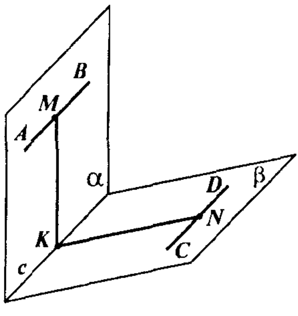


Рис. 138

№ 215. Обозначим плоскости α и β, в которых лежат прямые AB и CD соответственно. И прямая c — ребро двугранного угла. Тогда по утв. 1 п. 6 следует, что $AB \parallel c$ и $CD \parallel c$, а значит, все точки прямой AB равноудалены от прямой c.

Возьмем точку K на прямой c и построим перпендикуляр KM и KN к прямым AB и CD.

Тогда $\angle MKN = 60°$ (по условию), а $KM = 8$ см и $KN = 6{,}5$ см. По теореме косинусов:

$$MN^2 = KM^2 + KN^2 - 2\ KN \cdot KM \cdot \cos 60°$$

$$MN^2 = 64 + 42{,}25 - 8 \cdot 13 \cdot \frac{1}{2} = 54{,}25, \text{ откуда } MN = \frac{1}{2}\sqrt{217}.$$

Но заметим, что $AB \perp MKN$ и $CD \perp MKN$, так как $c \perp MKN$, а $AB \parallel c$ и $CD \parallel c$.

Таким образом $MN \perp AB$ и $MN \perp CD$, значит MN и есть расстояние между прямыми AB и CD.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{217}$.

№ 216. Указание: Провести BD_1 параллельно AC, так чтобы ABD_1C — квадрат (т. е. $BD_1 = a$). Тогда $\angle D_1BD = 120°$ (рис. 139). Доказать, что $\angle DD_1C = 90°$ и по теореме Пифагора найти CD, найдя DD_1 из $\triangle D_1BD$ по теореме косинусов.

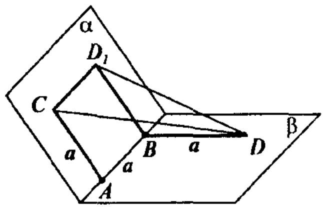


Рис. 139

№ 217. Обозначим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и пусть $AB = 3a$, $AD = 7a$, $AA_1 = 8a$.

$S_{AA_1B_1B} + S_{AA_1D_1D} + S_{ABCD} = 404.$ Значит

$$24\,a^2 + 56\,a^2 + 21\,a^2 = 404$$

$$101\,a^2 = 404,\ a^2 = 4,\ a = 2.$$

Таким образом измерения параллелепипеда равны 6, 14, 16 дм.

$AC_1 = \sqrt{6^2 + 14^2 + 16^2} = 2\sqrt{122}$ дм.

Ответ: $2\sqrt{122}$ дм.

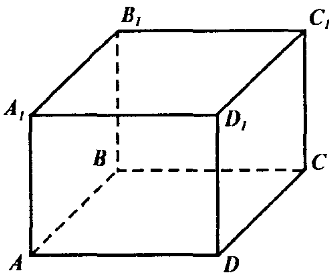


Рис. 140

Глава III. Многогранники

§ 1. Понятие многогранника. Призма

№ 218. а) Боковые грани призмы — параллелограммы, а так как один из углов прямой, так как ребра перпендикулярны основанию, то это прямоугольники.

б) Так как боковые ребра призмы равны, а ребра основания правильной призмы также равны, то боковые грани — равные прямоугольники.

№ 219. Пусть $AB = 5$ см, $AD = 12$ см (рис. 141). Тогда $AC = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ см. Но AC — проекция AC_1 на плоскость $ABCD$, поэтому $\angle CAC_1 = 45^\circ$. Тогда $CC_1 = AC \cdot \operatorname{tg} \angle CAC_1$

$CC_1 = 13 \cdot 1 = 13$ см.

Ответ: 13 см.

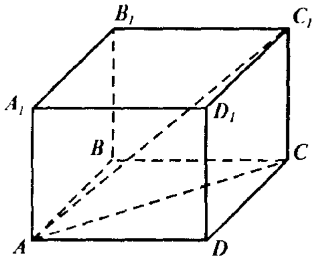


Рис. 141

№ 220. Указание: так как в прямом параллелепипеде все боковые ребра равны и перпендикулярны к основанию, то все диагонали можно найти по теореме Пифагора.

№ 221. Построим сечение через A_1B_1 и точку C. Соединим A_1 с C и B_1 с C. Тогда A_1CB_1 – искомое сечение.

$CA_1 = \sqrt{CA^2 + AA_1^2} = 10$ см.

$CB_1 = \sqrt{CB^2 + BB_1^2} = 10$ см.

Таким образом $\triangle A_1CB_1$ — равнобедренный и медиана CM является и высотой (рис. 142).

$MB_1 = \frac{1}{2} A_1B_1 = 4$ см.

Тогда $MC = \sqrt{B_1C^2 - MB_1^2} = \sqrt{84}$

Таким образом $S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{84} = 4\sqrt{21}$.

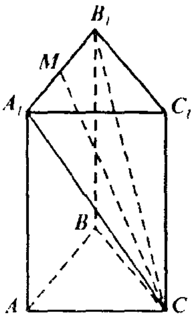


Рис. 142

№ 222. <u>Указание</u>: Доказать, что двугранный угол при боковой грани призмы — это угол между соответствующими сторонами трапеции.

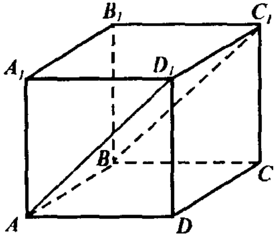


Рис. 143

№ 223. Пусть куб $ABCDA_1B_1C_1D$ и сечение проведено через AB и C_1D_1. Тогда это сечение — ABC_1D_1, причем это прямоугольник. Пусть ребро куба равно a (рис. 143). Тогда $AD_1 = BC_1 = a\sqrt{2}$.

$S_{ABC_1D_1} = AB \cdot AD_1 = a \cdot a\sqrt{2} =$
$= a^2\sqrt{2} = 64\sqrt{2}$, значит $a = 8$ см. Таким образом ребро куба равно 8 см, а диагональ $8\sqrt{3}$ см.

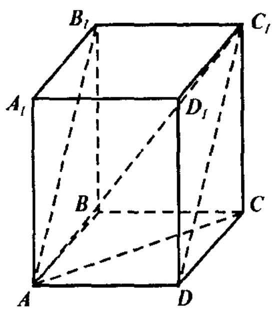


Рис. 144

№ 224. Так как призма правильная, то в основании лежит квадрат. И так как диагональ основания равна $4\sqrt{2}$ см, то ребро основания равно 4 см. Таким образом $AD = CD = 4$ см (рис. 144).

Т. к. AC — проекция AC_1 на плоскость основания, то $\angle C_1AC = 60°$. Тогда
$CC_1 = AC \cdot \mathrm{tg}60° = 4\sqrt{2}\sqrt{3} = 4\sqrt{6}$ см.
$C_1D = \sqrt{CD^2 + CC_1^2}$
$C_1D = \sqrt{16 + 16 \cdot 6} = 4\sqrt{7}$ см.
Значит $S_{AB_1C_1D} = 4\sqrt{7} \cdot 4 = 16\sqrt{7}$ см^2.

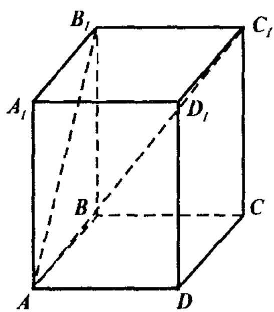


Рис. 145

№ 225. Пусть угол между диагональю AC_1 и плоскостью AA_1B_1B равен 30°. Так как AB_1 — проекция AC_1 на плоскость AA_1B_1B, то $\angle C_1AB_1 = 30°$. Значит, $\angle C_1AD = 60°$.

Пусть ребро основания равно a. Тогда $AC_1 = \dfrac{AD}{\cos\angle C_1AD} = \dfrac{a}{\cos 60°} = 2a$;
$AC = \sqrt{2}\,a$. Таким образом

$$\cos\angle C_1AC = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \angle C_1AC = 45°.$$

Таким образом искомый угол равен 45°.

№ 226. Проведем прямую, параллельную диагонали AC_1, через точку D. Эта прямая пересечет B_1C_1 в точке K, причем $B_1C_1 = C_1K = AD$. Тогда KB пересечет CC_1 в точке N, причем N — середина CC_1. Тогда BND — искомое сечение. Найдем его площадь.

$BD = 2\sqrt{2}$ см; $DN = \sqrt{DC^2 + CN^2} = 2\sqrt{2}$ см;

$BN = \sqrt{BC^2 + NC^2} = 2\sqrt{2}$ см.

Таким образом, $\triangle BND$ — правильный, а тогда его площадь S равна $S = \frac{1}{2} BN \cdot ND \cdot \sin 60° = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ см^2.

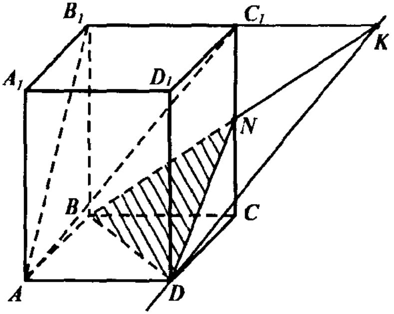


Рис. 146

№ 227. а) Так как $\angle A_1AB = \angle A_1AC$, то по задаче 161 проекция AA_1 на плоскость ABC является биссектрисой угла BAC, а значит и высотой $\triangle ABC$, опущенной на сторону BC. А тогда по теореме о трех перпендикулярах $AA_1 \perp BC$.

б) Так как $AA_1 \parallel BB_1$ и $AA_1 \perp BC$. Значит $BB_1 \perp BC$, а тогда параллелограмм BB_1C_1C является прямоугольником.

№ 228. Пусть точка O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$. Значит точка O — проекция A_1.

Значит AO проекция AA_1, поэтому $\angle A_1AO = 45°$.

Найдем AO: AM — медиана и высота $\triangle ABC$.

$AM^2 = AB^2 - BM^2$,

$AM = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ см.

Значит, $AO = \frac{2}{3} AM = 8$ см.

Тогда $AA_1 = \frac{AO}{\cos 45°} = 8\sqrt{2}$ см. Значит, боковые ребра равны $8\sqrt{2}$ см. Аналогично задаче 227, очевидно, что $AA_1 \perp BC$ (т. к. $AM \perp BC$), следовательно BB_1C_1C — прямоугольник. Тогда $S_{BB_1CC_1} = BB_1 \cdot BC = 80\sqrt{2}$ см^2.

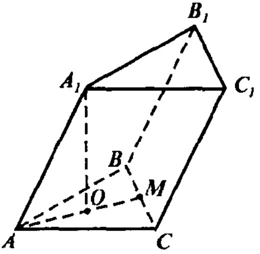


Рис. 147

№ 229. Указание: Площадь боковой поверхности считается по теореме п. 27. А площадь основания равна:

$$S = \frac{na^2 \sin \frac{360°}{n}}{4\left(1 - \cos \frac{360°}{n}\right)},$$ где n — число сторон многоугольника в основании.

№ 230. Пусть $AB = 5$ см, $AC = 3$ см, $\angle BAC = 120°$.

Найдем BC по теореме косинусов:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$

$BC^2 = 25 + 9 + 15 = 49$.

Так как призма прямая, то все боковые грани — прямоугольники. Ясно, что боковая грань с наибольшей площадью — это BB_1C_1C.

$S_{BB_1C_1C} = BB_1 \cdot BC = 35$, отсюда $BB_1 = 5$ см.

Тогда по теореме п. 27

$S_{бок\ пов} = 5 \cdot (3 + 5 + 7) = 75$ см^2.

Ответ: 75 см^2.

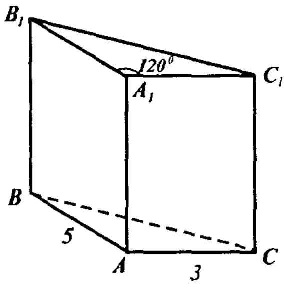


Рис. 148

№ 231. Указание: Аналогично задаче 230. По теореме косинусов

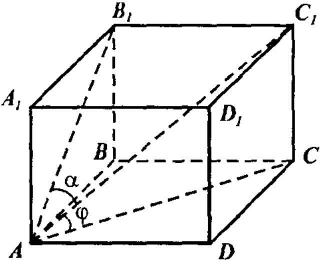


Рис.149

найти диагонали параллелепипеда, лежащего в основании и, выбрав из них наименьшую, найти высоту параллелепипеда.

№ 232. Рассмотрим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 149).

Тогда $\angle C_1AB_1$ — угол между диагональю и боковой гранью.

$\angle C_1AC$ — угол между диагональю и основанием. Тогда

$\sin\alpha = \dfrac{B_1C_1}{AC_1}$, $B_1C_1 = \sin\alpha\cdot d$, $CC_1 = \sin\varphi\cdot d$.

Но $d^2 = d^2\sin^2\varphi + d^2\sin^2\alpha + AB^2$, $AB = d\cdot\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha}$. Тогда площадь боковой поверхности равна

$S_{\text{бок. пов}} = 2\sin\varphi\cdot d\cdot(d\sin\alpha + d\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha})$.

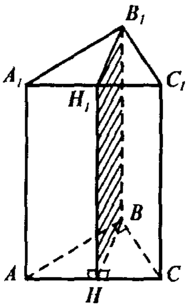


Рис.150

№ 233. Проведем высоту BH в $\triangle ABC$ и $HH_1 \perp AC$. Тогда BHH_1B_1 — искомое сечение (рис. 150). Так как $\angle BHC = 90°$, а это и есть угол между плоскостью сечения и плоскостью AA_1C_1C (так как $BH \perp HH_1$ по условию, а $AC \perp HH_1$ по построению). Таким образом точки H и D совпадают.

Найдем BH. Обозначим $BH = x$.

Тогда $BC^2 = x^2 + CH^2$, $AB^2 = x^2 + AH^2$, $BC^2 + AB^2 = AC^2$. Значит

$(x^2 + 12^2) + (x^2 + 27^2) = (12 + 27)^2$, откуда

$2x^2 = 2\cdot 12\cdot 27$, $x = 18$ см

Значит, $S_{\text{сеч.}} = BH\cdot HH_1 = 18\cdot 10 = 180$ см^2 (то, что BHH_1B_1 — прямоугольник видно из построения).

Ответ: 180 см^2.

№ 234. Линия пересечения плоскости сечения и плоскости ABC перпендикулярна к плоскости AA_1C_1C, в частности к прямой AC, поэтому проведем прямую MK перпендикулярно к AC.

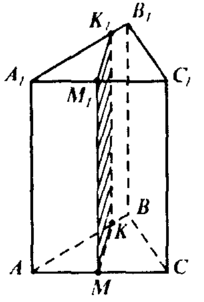


Рис. 151

Аналогично проведем M_1K_1 перпендикулярно к A_1C_1. Тогда MM_1K_1K — искомое сечение (см. рис. 151). Очевидно, что MM_1K_1K — прямоугольник и $MM_1 = 42$ см, так как $MM_1 = AA_1$.

Найдем MK из $\triangle ABC$ (см. рис. 152). MK — серединный перпендикуляр к AC, поэтому $CK = AK$.

Обозначим, $AK = CK = x$. Известно, что $AB = 21$ см, $CB = 20$ см.

Тогда $BK = \sqrt{CK^2 - CB^2} = AB - AK$. Таким образом, $\sqrt{x^2 - 20^2} = 21 - x$, откуда

$42x = 841$, $x = \dfrac{841}{42}$ см.

$AC = \sqrt{CB^2 + BA^2} = 29$ см.

$AM = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{29}{2}$ см. Тогда

$MK = \sqrt{AK^2 - AM^2}$.

$$MK = \sqrt{\left(\frac{841}{42}\right)^2 - \left(\frac{29}{2}\right)^2} = \frac{580}{42}$$

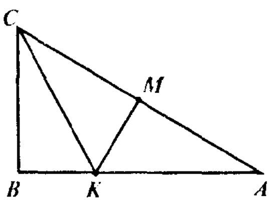


Рис. 152

Тогда $S_{MM_1K_1K} = \dfrac{580}{42} \cdot 42 = 580$ см^2.

№ 235. Проведем сечение CA_1B через катет BC и точку A_1 (см. рис. 153). Так как $AA_1 \perp ABC$, то AB — проекция A_1B на плоскостью ABC.

По теореме о трех перпендикулярах следует, что $A_1B \perp BC$. Тогда по условию $\angle A_1BA = \theta$ и $\angle BAC = \varphi$. Обозначим $BC = a$.

Тогда $AB = a \cdot \mathrm{ctg}\,\varphi$, $AC = \dfrac{a}{\sin\varphi}$.

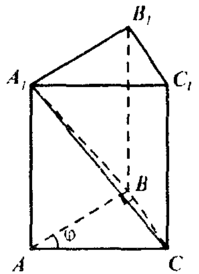


Рис. 153

Из $\triangle AA_1B$ видим: $A_1B = \dfrac{AB}{\cos\angle A_1BA} = \dfrac{a \cdot \mathrm{ctg}\varphi}{\cos\theta}$

$AA_1 = AB \cdot \mathrm{tg}\,\theta = a \cdot \mathrm{ctg}\,\varphi \cdot \mathrm{tg}\,\theta$.

Тогда $S_{CA_1B} = \dfrac{1}{2} A_1B \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a \cdot \mathrm{ctg}\varphi}{\cos\theta} \cdot a = \dfrac{a^2\,\mathrm{ctg}\varphi}{2\cos\theta}$.

$$S_{\text{бок. пов.}} = AA_1 \cdot (AB + BC + AC) = a \cdot \operatorname{ctg}\varphi \cdot tg\theta \left(a \cdot \operatorname{ctg}\varphi + a + \frac{a}{\sin\varphi} \right) =$$

$$= \frac{a^2 \operatorname{ctg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\theta(\cos\varphi + \sin\varphi + 1)}{\sin\varphi},$$

$$\frac{S_{\text{бок пов}}}{S_{\text{сеч.}}} = \frac{\operatorname{tg}\theta \cdot (\cos\varphi + \sin\varphi + 1) \cdot 2\cos\theta}{\sin\varphi} = \frac{2\sin\theta(\cos\varphi + \sin\varphi + 1)}{\sin\varphi}.$$

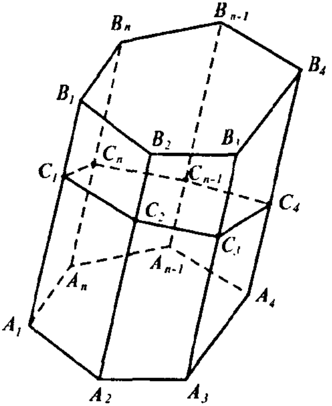


Рис. 154

№ 236. Пусть сечение $C_1C_2C_3$ ... C_{n-1} C_n Тогда площадь $A_1B_1B_2A_2$ это $C_1C_2 \cdot A_1B_1$, так как боковая грань это параллелограмм, а C_1C — это высота этого параллелограмма (рис. 154).

Тогда сложив все боковые грани получим

$S_{\text{бок. пов.}} = A_1B_1 \cdot (C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_4 + \dots + C_nC_1) = A_1B_1 \cdot P_{\text{сеч}}$, где $P_{\text{сеч.}}$ — периметр сечения.

№ 237. Указание: Воспользоваться задачей 236.

№ 238. Указание: Доказать, что перпендикулярное сечение — это прямоугольный треугольник с катетами, равными 12 см и 35 см.

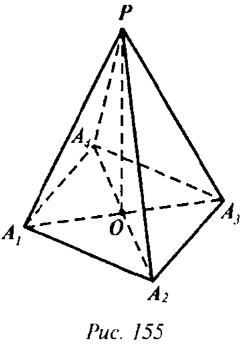


Рис. 155

§ 2. Пирамида

№ 239. Пусть $A_1A_3 = 8$ см и точка O — проекция точки P (рис. 155). Тогда $A_1O = OA_3 = 4$ см и так как $A_1A_3 \perp A_2A_4$, то

$OA_2 = \sqrt{5^2 - 4^2} = OA_4$.

Но $PO \perp A_1A_3$ и $PO \perp A_2A_4$, поэтому

$PA_1 = \sqrt{PO^2 + OA_1^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$ см,

$PA_3 = \sqrt{65}$ см.

$PA_2 = PA_4 = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$ см.

№ 240. Пусть точка O — точка пересечения диагоналей $AB = 20$ см, $AD = 36$ см.

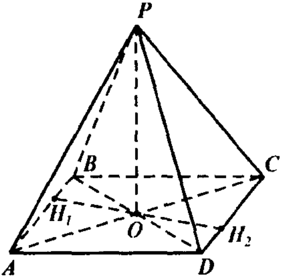


Рис. 156

Проведем прямую H_1OH_2, перпендикулярную к прямым AB и CD.

Тогда $OH_1 \perp AB$, $OH_2 \perp CD$ и $OH = OH_2$. Поэтому по теореме о трех перпендикулярах $PH_1 \perp AB$ и $PH_2 \perp CD$; т. е. PH_1 и PH_2 являются высотами боковых граней PAB и PCD. Найдем их:

H_1H_2 — высота параллелограмма $ABCD$. Поэтому $AB \cdot H_1H_2 = 360$, значит $H_1H_2 = 18$ см и $OH = OH_2 = 9$ см. По теореме Пифагора

$PH_1 = \sqrt{PO^2 + OH_1^2} = 15$ см,

$PH_2 = 15$ см.

Аналогично находятся высоты PH_3 и PH_4 граней PBC и PAD.

$PH_3 = \sqrt{PO^2 + OH_3^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ см; $PH_4 = 13$ см. Тогда

$$S_{\text{бок. пов.}} = \frac{1}{2}AB \cdot PH_1 + \frac{1}{2}BC \cdot PH_3 + \frac{1}{2}CD \cdot PH_2 + \frac{1}{2}PH_4 \cdot AD =$$

$= 768$ см^2.

№ 241. Пусть $AB = 5$ м, $AD = 4$ м, $BD = 3$ м и $PO = 2$ м.

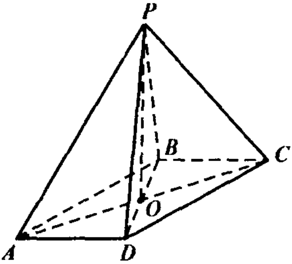


Рис. 157

Заметим, что $AB^2 = AD^2 + BD^2$ и значит $\angle BDA = 90°$. Но OD — проекция PD на плоскость $ABCD$. Поэтому $PD \perp AD$ (рис. 157).

Аналогично $PB \perp BC$. Найдем PD:

$PD = \sqrt{PO^2 + OD^2} = \sqrt{4 + 2{,}25}$;

$PD = 2{,}5$ м. Аналогично $PB = 2{,}5$ м.

$PC = \sqrt{PB^2 + BC^2}$

$PC = \sqrt{6{,}25 + 16} = \frac{\sqrt{89}}{2}$ м, аналогично $PA = \frac{\sqrt{89}}{2}$ м.

$S_{APD} = \frac{1}{2} PD \cdot AD = 5$ м^2; $S_{PBC} = 5$ м^2; $S_{ABCD} = BD \cdot AD = 12$ м^2.

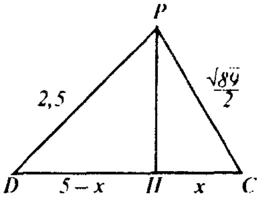


Рис. 158

Найдем S_{PAB} и S_{PDC}: так как $\triangle PAB = \triangle PDC$ (по трем сторонам), то достаточно найти площадь одного из треугольников.

Рассмотрим $\triangle PDC$: проведем высоту PH (рис. 158). Пусть $CH = x$. Тогда $PD^2 - DH^2 = PC^2 - CH^2 = PH^2$. Таким образом $6{,}25 - (5 - x)^2 = \frac{89}{4} - x^2$.

Отсюда $10x = 41$; $x = 4{,}1$.

Тогда $PH = \sqrt{6{,}25 - 0{,}81} = \sqrt{5{,}44}$.

$S_{PDC} = \frac{1}{2} 5\sqrt{5{,}44} = \sqrt{34}$ м²; $S_{пол} = 5 + 5 + 12 + \sqrt{34} + \sqrt{34} = 22 +$ $+ 2\sqrt{34}$ м².

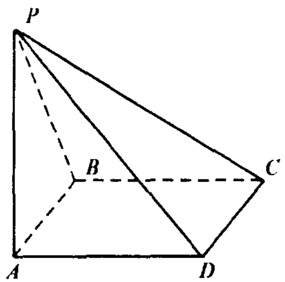


Рис. 159

№ 242. Пусть $PA \perp ABCD$ и угол между гранью PCD и плоскостью $ABCD$ равен 45°.

Так как $AD \perp CD$ и AD — проекция PD, то $PD \perp CD$. Таким образом $\angle PDA = 45°$. Обозначим сторону квадрата за a. $AD = AB = BC = CD = a$.

Тогда

$PA = AD \cdot \text{tg}\, 45° = a$,

$PD = PB = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{2}$.

Так как $PA \perp AC$, то по теореме Пифагора $PC = a\sqrt{3}$. Таким образом PC — наибольшее ребро, поэтому $a\sqrt{3} = 12$, $a = 4\sqrt{3}$.

а) Высота пирамиды — это PA: $PA = 4\sqrt{3}$ см.

б) $S_{бок.} = S_{PAB} + S_{PBC} + S_{PCD} + S_{PAD} = \frac{1}{2}(PA \cdot AB + PB \cdot BC + PD \cdot DC +$ $+ PA \cdot AD) = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} + 4\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{3} + 4\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}\right) =$ $= \frac{1}{2}\left(48 + 48\sqrt{2} + 48\sqrt{2} + 48\right) = 48(1 + \sqrt{2})$ см².

№ 243. Заметим, что $\triangle DAB$ и $\triangle DAC$ прямоугольные, поэтому

$$S_{DAB} = \frac{1}{2}DA \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 13 = 58{,}5 \text{ см}^2.$$

$$S_{DA} = \frac{1}{2}DA \cdot AC = 58{,}5 \text{ см}^2.$$

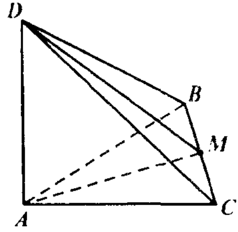


Рис. 160

Найдем S_{DBC}: проведем медиану AM в $\triangle ABC$. Тогда AM — высота (т. к. $AB = AC$). Но AM — проекция DM на плоскость ABC, поэтому $DM \perp BC$. По теореме Пифагора: $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ см

$DM = \sqrt{AD^2 + AM^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ см. Значит,

$S_{DBC} = \frac{1}{2}DM \cdot BC = 75 \text{ см}^2$. $S_{бок} = 192 \text{ см}^2$.

№ 244. Указание: аналогично задаче 243, но надо провести высоту треугольника ABC.

№ 245. Указание: доказать, что боковое ребро, по которому пересекаются две перпендикулярные к основанию грани, перпендикулярно к плоскости основания, а далее аналогично задаче 242.

№ 246. а) Пусть высота пирамиды — PO, а высоты боковых граней PA_1, PB_1, PC_1 (рис. 161).

OA_1 — проекция PA_1, поэтому $OA_1 \perp BC$. Значит OA_1 — расстояние от точки O до BC. Аналогично OB_1 и OC_1 — расстояние от точки O до AC и AB соответственно. Но по теореме Пифагора:

$$OB_1 = \sqrt{PB_1^2 - PO^2} = \sqrt{41^2 - 40^2} = 9 \text{ см},$$

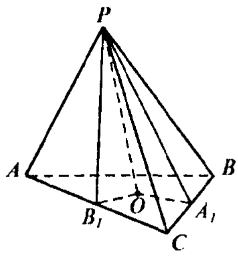


Рис. 161

аналогично OA_1 и OC_1 равны 9 см. Но это и означает, что O — центр вписанной окружности.

б) Площадь треугольника S вычисляется через радиус r вписанной окружности и полупериметр p по следующей формуле: $S = p \cdot r$, поэтому $S_{ABC} = 9 \cdot 21 = 189 \text{ см}^2$.

№ 247. Указание: при обозначениях как в задаче 246 доказать, что $\triangle POA_1 = \triangle POB_1 = \triangle POC_1$, откуда непосредственно следует п. а) и п. б), п. в).

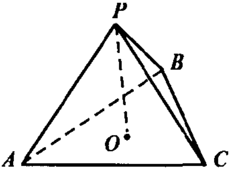


Рис. 162

№ 248. Пусть $AB = AC = 10$ см, $BC = 12$ см. По задаче 247 достаточно найти высоту одной боковой грани, и чтобы найти площадь боковой поверхности надо перемножить высоту на полупериметр основания.

Найдем радиус вписанной в основание окружности:

$$r = \frac{S_{ABC}}{p}, \text{ где } p = \frac{(AB + BC + AC)}{2};$$

$$S_{ABC} = \sqrt{16\cdot(16-10)(16-10)(16-12)} = 48 \text{ см}^2$$ (по формуле Герона).

Таким образом $r = \frac{48}{16} = 3$ см. Тогда высота боковой грани равна $\frac{r}{\cos 45^\circ} = 3\sqrt{2}$ см. Тогда $S_{\text{бок. пов.}} = 3\sqrt{2}\cdot 16 = 48\sqrt{2}\text{см}^2$.

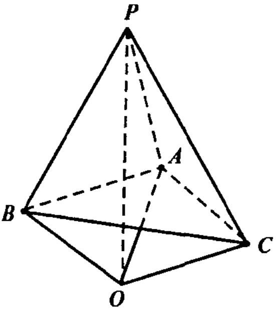


Рис. 163

№ 249. а) Рассмотрим пирамиду $PA_1A_2\dots A_n$ и пусть высота пирамиды PO.

Заметим, что $\triangle POA_1 = \triangle POA_2$ по признаку равенства прямоугольных треугольников (по двум сторонам).

Значит $OA_1 = OA_2$;
аналогично $OA_2 = OA_3 = \dots = OA_n$. Но это и означает, что точка O — центр описанной окружности.

б) Так как OA_1 — проекция стороны PA_1, то угол PA_1O и есть угол между ребром PA_1 и основанием. Но из равенства треугольников:

$\triangle PA_1O = \triangle PA_2O = \dots = \triangle PA_nO$ следует равенство углов между боковыми ребрами и плоскостью основания.

№ 250. PO — высота пирамиды, $AB = AC$ и $\angle A = 120°$ (см. рис. 164). Тогда по условию $\angle APO = \angle BPO = \angle CPO = 45°$. Отсюда прямоугольные треугольники $\triangle APO$, $\triangle BPO$ и $\triangle CPO$ равны по катету и острому углу, причем эти треугольники равнобедренные, поэтому точка O — центр описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности и $OA = OB = OC = 16$ см.

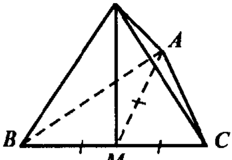


Рис. 164

Так как $OB = OC$, $AB = AC$, то $\triangle AIB = \triangle AOC$ по трем сторонам. Значит $\angle CAO = \angle BAO = 60°$, поэтому $\triangle BAO$ и $\triangle CAO$ равносторонние. Таким образом $AB = AC = 16$ см. По теореме косинусов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \cdot AC \cdot \cos 120° = 16^2 \cdot 3;\ BC = 16\sqrt{3}.$$

Тогда площадь треугольника через стороны и радиус описанной окружности получается так:

$$S_{\text{осн.}} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{16 \cdot 16 \cdot 16\sqrt{3}}{4 \cdot 16}\text{см}^2.$$

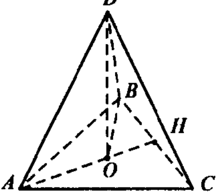


Рис. 165

№ 251. По задаче 249 высота проходит через центр описанной окружности основания, а так как основание — прямоугольный треугольник, то высота проходит через середину гипотенузы M (рис. 164)

$$MC = \frac{1}{2}BC = 5\text{ см},$$

тогда $DC = \sqrt{DM^2 + MC^2} = 13$ см.

Ответ: 13 см.

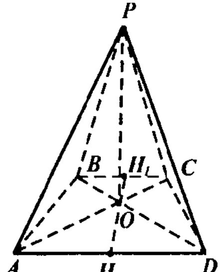


Рис. 166

№ 252. По задаче 249 следует, что точка O, где O — проекция точки D, является центром описанной окружности.

Найдем радиус R этой окружности из:

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R},$$

$$AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} = 10\sqrt{3}$$

$\frac{54}{2} = \frac{3\sqrt{10}\cdot 6\cdot 3\sqrt{10}}{4R}$, $R = 5$ см.
Тогда $OB = 5$ см и по теореме Пифагора
$DO^2 = DB^2 - OB^2$, $DO = 12$ см.

№ 253. По задаче 249 высота пирамиды проходит через центр O описанной около трапеции окружности, поэтому $AO = OB = OC = OD$.

Проведем высоту H_1H_2 через точку O. Так как $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ равнобедренные, то H_1 — середина BC, H_2 — середина AD.

Обозначим $OH_1 = x$. Тогда $OC^2 = OH_1^2 + H_1C^2$, $OD^2 = OH_2^2 + H_2D^2$, $OC = OD$, значит

$3^2 + x^2 = (2\sqrt{6})^2 + (5 - x)^2$, откуда $x = 4$ см. Поэтому $OC^2 = OH_1^2 + H_1C^2$, $OC = 5$ см. Тогда $PO^2 = PC^2 - OC^2 = 144$, $PO = 12$ см.

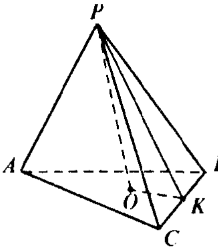


Рис. 167

№ 254. а) PO — высота пирамиды $PABC$. Радиус R описанной вокруг правильного треугольника окружности равен $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, поэтому $PB = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}$ (рис. 167).

б) В $\triangle PBC$ $PB = PC = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}$. PK — высота, а следовательно, и медиана.

Поэтому $\sin\angle BPK = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}}$, следовательно $\angle BPK =$
$= \arcsin\frac{a}{2\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}}$. Значит, $\angle BPC = 2\angle BPK = 2\arcsin\frac{a}{2\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}}$.

в) Искомый угол — это $\angle PBO$.

$\sin\angle PBO = \frac{H}{\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}}$, $\angle PBO = \arcsin\frac{H}{\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}}$

г) Искомый угол — это угол $\angle PKO$, так как $PK \perp CB$ по построению, а $OK \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах.

$$OK = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \text{ поэтому } \operatorname{tg}\angle PKO = \frac{6H}{a\sqrt{3}},\ \angle PKO = \operatorname{arctg}\frac{2H\sqrt{3}}{a}.$$

д) Проведем высоту CM в $\triangle PBC$ (рис. 168). Тогда из равенства $\triangle PAB$ и $\triangle PBC$ следует, что AM — высота $\triangle PAB$ и $AM = CM$. Найдем CM: пусть $BM = x$, тогда

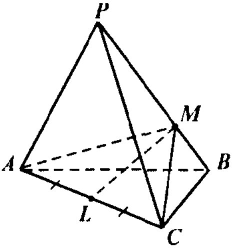


Рис. 168

$CM^2 = CB^2 - BM^2 = CP^2 - PM^2$, таким образом

$$a^2 - x^2 = H^2 + \frac{a^2}{3} - \left(\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}} - x\right)^2,$$

откуда

$$x = \frac{a^2}{2\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}},\ CM^2 = a^2 - \frac{a^4}{4\left(H^2 + \frac{a^2}{3}\right)},$$

$$CM = \sqrt{\frac{12a^2H^2 + a^4}{12H^2 + 4a^2}}. \text{ Тогда}$$

$$ML = \sqrt{MC^2 - LC^2} = \sqrt{\frac{12a^2H^2 + a^4}{12H^2 + 4a^2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{3aH}{\sqrt{12H^2 + 4a^2}} \cdot \frac{1}{2},$$

где ML — высота и медиана $\triangle AMC$. Тогда

$$\angle CML = \operatorname{arctg}\frac{\frac{a}{2}\cdot\sqrt{12H^2 + 4a^2}}{3aH},$$

$$\angle CMA = 2\,\angle CML = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3H^2 + a^2}}{3H}.$$

№ 255. По задаче 254 п. б) следует, что $\varphi = 2\arcsin\frac{a}{2\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}}$,

где $a = 8$, а N — высота пирамиды. Поэтому

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{a}{2\sqrt{H^2+\frac{a^2}{3}}},\ H^2+\frac{a^2}{3}=\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}},\quad H=\sqrt{\frac{16}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}-\frac{64}{3}}.$$

№ 256. Аналогично задаче 254.

№ 257. По задаче 254 п. г) $\operatorname{tg} 45^\circ=\frac{2\sqrt{3}h}{a}$, значит $a=2\sqrt{3}\,h$, а апофема, очевидно, равна $h\sqrt{2}$ поэтому $S_{бок\ пов}=\frac{1}{2}h\sqrt{2}\cdot 3\cdot 2\sqrt{3}h=3\sqrt{6}h^2$.

$$S_{осн.}=\frac{1}{2}a\cdot a\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{12h^2\cdot\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}h^2.\quad S_{пов.}=3\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+1\right)h^2.$$

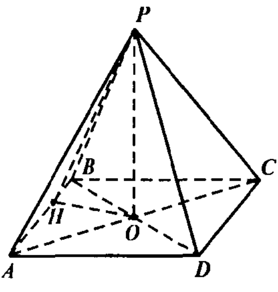


Рис. 169

№ 258. Проведем высоту PO пирамиды $PABCD$, так как $ABCD$ — квадрат, то центр описанной окружности это точка пересечения диагоналей (рис. 169).

Тогда $\angle PBO=60^\circ$, так как OB — проекция PB на плоскость основания.

Тогда $OB=PB\cdot\cos 60^\circ=12\cdot\frac{1}{2}=6$ см

$BD=AC=2\cdot OB=12$ см. Значит

$BC=AB=AD=CD=\frac{12\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$ см.

$S_{ABCD}=6\ 2\cdot 6\ 2=72$ см^2.

$S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}\,PH\cdot AB$, где PH — высота, а значит, и медиана равнобедренного треугольника APB.

$PH=\sqrt{PB^2-BH^2}=\sqrt{144-9\cdot 2}=\sqrt{126}=3\sqrt{14}$ см.

$S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{14}\cdot 6\sqrt{2}=18\sqrt{7}$ см^2, тогда $S_{бок\ пов}=72\sqrt{7}$ см^2.

$S_{полн\ пов.}=72\,(1+\sqrt{7})$ см^2.

№ 259. PO — высота пирамиды. Проведем $OH\perp AB$, тогда $\angle OHP$ и есть угол между боковой гранью и основанием, так как

$PH \perp AB$ по теореме о трех перпендикулярах (рис. 169). Таким образом $\angle PHO = 60°$. Но заметим, что

$$OH = \frac{1}{2}AD = 3 \text{ см}.$$

Тогда $PO = OH \cdot \operatorname{tg} 60° = 3 \cdot \sqrt{3}$ см $OB = \frac{1}{2}BD = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ см.

$PB = \sqrt{PO^2 + BO^2} = \sqrt{27+18} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ см.

№ 260. Проведем прямую CO. CO пересечет AB в точке H. Так как O — центр треугольника ABC, то $CH \perp AB$ и $AH = BH$. Но тогда DH — медиана, а следовательно, и высота равнобедренного треугольника ADB, т. е. DH апофема грани ADB.

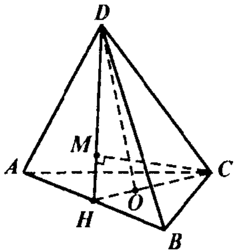


Рис. 170

а) $AB \perp CH$, $AB \perp DH$ значит прямая AB перпендикулярна плоскости α по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

б) Перпендикуляр CM к апофеме грани ADB лежит в плоскости CDH, поэтому $CM \perp AB$. Но $CM \perp DH$, поэтому по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $CM \perp ADB$.

№ 261. Указание. Воспользоваться задачей 260.

№ 262. Ребро основания, лежащее в данной боковой грани, перпендикулярно к проведенной плоскости, так как оно перпендикулярно и к апофеме боковой грани, и к высоте пирамиды, которые пересекаются в вершине пирамиды. Но плоскость боковой грани проходит через это ребро основания, поэтому по теореме п. 23 следует, что проведенная плоскость и плоскость боковой грани перпендикулярны.

№ 263. а) Прямая $CD \parallel KN$ поэтому линия пересечения плоскости сечения и плоскости MCD параллельна CD. Поэтому проведем $LP \parallel CD$, где точка P лежит на прямой MD. Соединим P с N. $KLPN$ — искомое сечение. Так как $KN \parallel CD$, $PL \parallel CD$, то $KN \parallel PL$, и так как

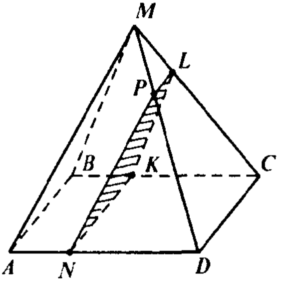


Рис. 171

$KN = CD$, а $PL \neq CD$, то $KN \neq PL$, поэтому искомое сечение — трапеция.

б) По условию $NK \parallel AB$, $KL \parallel BM$, следовательно по теореме п. 10 следует, что плоскости AMB и KLN параллельны.

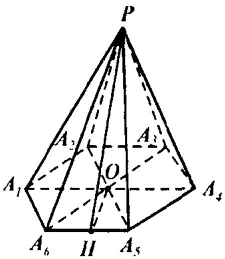


Рис. 172

№ 264. Ясно, что высота PO пирамиды $PA_1A_2A_3A_4A_5A_6$ проходит через центр описанной окружности. Заметим, что $OA_1 = OA_2 = \ldots \ldots = OA_n = a$. Пусть $PO = h$.

$$S_{A_1PA_4} = S_{PA_5A_6};\ S_{A_1PA_4} = \frac{1}{2}PO \cdot A_1A_4 = h \cdot a$$

$$S_{PA_5A_6} = \frac{1}{2}\ PH \cdot A_5A_6,$$ где PH — апофема грани PA_5A_6

$$OH = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ PH = \sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}}.$$

Тогда $ah = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}} \cdot a,$

$$2h = \sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}},\quad 4h^2 = h^2 + \frac{3}{4}a^2,\ a^2 = 4h^2,\ a = 2h,\ h = \frac{a}{2}.$$

Тогда $PH = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}} = a$

$$S_{бок.\ пов} = \frac{1}{2}\ PH \cdot (A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_6A_1) = \frac{1}{2}\ a \cdot 6a = 3a^2.$$

Ответ: $3a^2$.

№ 265. Пусть получилось сечение CKB, тогда очевидно $CK = BK$ поэтому KM, где M — середина BC, является высотой $\triangle CKB$. $KM \perp BC$. Но $AM \perp BC$ поэтому $\angle KMA = 30^\circ$. Заметим, что точка O —

проекция точки P попадает на отрезок AM, поэтому $\angle PAM = 60°$. Тогда в $\triangle MKA$: $\angle M = 30°$; $\angle A = 60°$, следовательно $\angle MKA = 90°$.

Тогда $MK = MA \cdot \cos 30°$;

$$MA = AC \cdot \sin 60° = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\text{ см}$$

$$MK = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\text{ см. } S_{PKC} =$$

$$S_{BKC} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54\text{ см}^2.$$

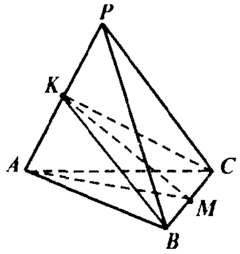


Рис. 173

№ 266. Проведем сечение через диагональ AC параллельно MD. Тогда прямая, по которой пересекаются плоскости сечения и BMD, параллельна MD. Поэтому это средняя линия HK треугольника BMD. Таким образом AKC искомое сечение, где K — середина BM (рис. 174а). Найдем стороны KC и AK: рассмотрим $\triangle MBC$ (рис. 174б):

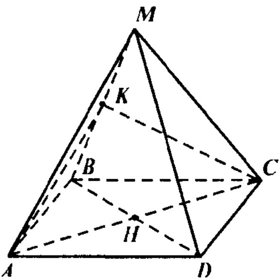


Рис. 174а

$$MB = MC = \sqrt{MN^2 + CN^2} =$$
$$= \sqrt{4 + 5^2} = \sqrt{29}\text{ дм, так как}$$

$$CH = \frac{1}{2}AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

$$CH = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{36 + 64} = 5\text{ дм.}$$

Проведем в $\triangle MBC$ высоту MN (она же является медианой).

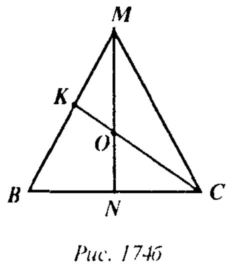


Рис. 174б

$$MN = \sqrt{MC^2 - CN^2} = \sqrt{29 - 4^2} = \sqrt{13}\text{ дм,}$$

так как $CN = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ дм.

Так как точка O — точка пересечения медиан CK и MN треугольника MBC, то $ON = \frac{1}{3}MN = \frac{\sqrt{13}}{3}$ дм.

Тогда $OC = \sqrt{ON^2 + NC^2}$

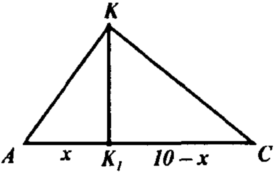


Рис. 174в

$OC = \sqrt{\frac{13}{9} + 16} = \frac{\sqrt{157}}{3}$ дм, а так как $KC = \frac{3}{2}OC$, то $KC = \frac{\sqrt{157}}{2}$ дм.

Аналогично из $\triangle AMB$ находится, что $AK = \frac{\sqrt{101}}{2}$ дм. Таким образом в $\triangle AKC$ (рис. 174в): $AK = \frac{\sqrt{101}}{2}$ дм, $KC = \frac{\sqrt{157}}{2}$ дм, $AC = 10$ дм.

Проведем высоту KK_1, обозначим $AK_1 = x$, тогда $CK_1 = 10 - x$ и $KK_1 = \sqrt{AK^2 - AK_1^2} = \sqrt{KC^2 - K_1C^2}$, отсюда $\frac{101}{4} - x^2 = \frac{157}{4} - (10-x)^2$, $20x = 86$, $x = 4{,}3$ дм, $KK_1 = \sqrt{\frac{101}{4} - \left(\frac{43}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{676}{100}} = 2{,}6$ дм.

Тогда $S_{\triangle AKC} = \frac{1}{2} \cdot KK_1 \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2{,}6 \cdot 10 = 13$ дм^2.

Ответ 13 дм^2.

№ 267. Рассмотрим боковую грань PA_1A_2. Она пересечена плоскостью по прямой B_1B_2. По утв. 1° п. 6 следует, что $A_1A_2 \parallel B_1B_2$. Поэтому по теореме Фалеса следует, что $\frac{PB_1}{B_1A_1} = \frac{PB_2}{B_2A_2}$.

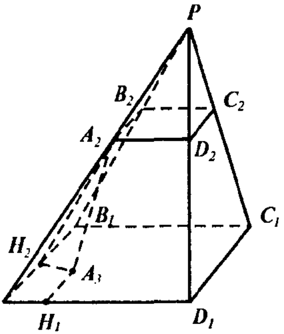


Рис. 175

Аналогично доказываются $\frac{PB_2}{B_2A_2} = \frac{PB_3}{B_3A_3} = \ldots = \frac{PB_n}{B_nA_n} = \frac{PH'}{H'H}$.

№ 268. По задаче 267 $\frac{PA_2}{A_2A_1} = \frac{1}{2}$,

$\Rightarrow \frac{PA_2}{PA} = \frac{PB_2}{PB_1} = \frac{PC_2}{PC_1} = \frac{PD_2}{PD_1} = \frac{1}{3}$,

поэтому

$\triangle PA_2B_2 \sim \triangle PA_1B_1$ и $A_2B_2 = \frac{1}{3}A_1B_1$.

Аналогично $B_2C_2 = \frac{1}{3}B_1C_1$; $C_2D_2 = \frac{1}{3}C_1D_1$, $A_2D_2 = \frac{1}{3}A_1D_1$.

Пусть $A_1B_1 = a$, тогда $A_2B_2 = B_2C_2 = C_2D_2 = A_2D_2 = \frac{a}{3}$

$S_{полн.\ пов.} = S_{A_1B_1C_1D_1} + S_{A_2B_2C_2D_2} + S_{бок.\ пов.} = a^2 + \frac{a^2}{9} + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot(4a + 4 \times$
$\times \frac{a}{3}) = \frac{10a^2}{9} + \frac{32a}{3} = 186,5\,a^2 + 48 = 837 \Rightarrow a = 9$ (так как $a > 0$).

Т. о. $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = A_1D_1 = 9$ дм,
$A_2B_2 = B_2C_2 = C_2D_2 = A_2D_2 = 3$ дм.

Проведем A_2A_3 — высоту усеченной пирамиды и A_2H_2, A_2H_1 — апофемы боковых граней. Тогда $A_1H_1 = A_3H_2 = 3$ дм; $A_2H_2 = A_2H_1 =$ $= 4$ дм. Поэтому $A_1H_2A_3H_1$ — квадрат и $A_3H_1 = 3$дм.

Тогда $A_2A_3 = \sqrt{A_2H_1^2 - A_3H_1^2} = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$ дм.

Ответ: $\sqrt{7}$ дм.

№ 269. Проведем высоту A_2N и апофему A_2M усеченной пирамиды (рис. 176). Тогда

$$A_1M = \frac{A_1C_1 - A_2C_2}{2} = 1 \text{ дм}.$$

$A_2M = \sqrt{A_1A_2^2 - A_1M^2} = \sqrt{3}$ дм. Ясно, что $\angle HA_1M = 30°$, так как $\angle B_1A_1C_1 = 60°$. Поэтому

$$HM = A_1M \cdot \operatorname{tg} 30° = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ дм}.$$

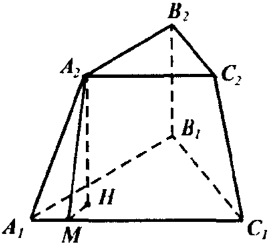


Рис. 176

Тогда

$$A_2H = \sqrt{A_2M^2 - MH^2},\ A_2H = \sqrt{3 - \frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ дм}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ дм и 3 дм.

№ 270. Указание: Две боковые грани являются прямоугольными, а третья — равнобедренная трапеция.

§ 3. Правильные многогранники

№ 279. Найдем угол между диагоналями DA_1 и DC_1. Заметим, что в $\triangle A_1C_1D$ все стороны равны. $A_1C_1 = C_1D = A_1D = \sqrt{2} \cdot AA_1$. Поэтому $\angle C_1DA_1 = 60°$.

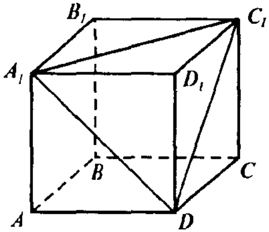


Рис. 177

№ 280. I. Найдем площадь $\triangle A_1DC_1$ (см. рис. 177). $A_1D = \sqrt{2}\,a$. Тогда

$$S_{A_1DC_1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2.$$

Это площадь сечения проведенного через диагональ соседних граней.

II. Найдем площадь $S_{ABC_1D} = AB_1 \cdot B_1C$, так как ABC_1D — прямоугольник.

$$S_{ABC_1D} = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}.$$

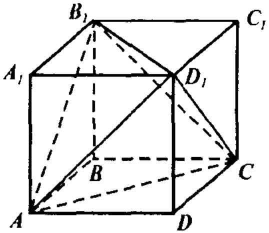


Рис. 178

№ 281. Ребра тетраэдра DAB_1C являются диагоналями граней куба, поэтому все ребра тетраэдра равны между собой, но это означает, что все грани тетраэдра равны между собой. Таким образом тетраэдр правильный (рис. 178).

Пусть ребро куба равно a.

Тогда $S_{\text{пов. куба}} = 6\,a^2$

$$S_{\text{пов. тетраэдра}} = 4\,S_{\text{грани тетраэдра}}$$

$$S_{\text{пов. тетраэдра}} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = 2\sqrt{3}a^2.$$

$$\frac{S_{\text{пов. куба}}}{S_{\text{пов. тетр.}}} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

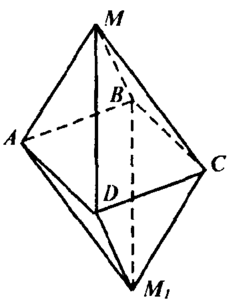


Рис. 179

№ 282. Найдем угол между AB и AD. Так как $AB = BC = CD = AD$, то $ABCD$ — ромб. Но так как в пирамиде $MABCD$ боковые ребра равны, то основание высоты падает в центр описанной вокруг основания $ABCD$ окружности. А раз вокруг ромба можно описать окружность, то этот ромб — квадрат. Таким образом, $\angle BAD = 90°$ (рис. 179).

№ 283. а) Линия пересечения плоскости сечения и плоскости ABC параллельна BC, поэтому проведем через центр O грани ABC линию MK, параллельно BC. Аналогично проведем MN параллельно CD. Тогда MNK — искомое сечение (рис. 180).

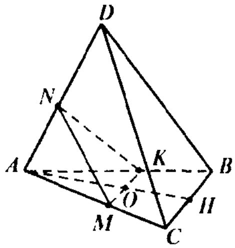


Рис. 180

Заметим, что $\triangle MNK \sim \triangle CDB$, причем коэффициент подобия равен $\dfrac{AO}{AH} = \dfrac{2}{3}$, где AH — медиана $\triangle BAC$, так как точка O — точка пересечения медиан правильного треугольника ABC.

$$S_{MNK} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot S_{CDB} = \frac{4}{9}\cdot a^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}a^2}{9}.$$

б) По задаче 261 $AD \perp BC$, поэтому ребро BC параллельно плоскости сечения аналогично п. а) проведем $MK \parallel CB$, а далее проведем $MN \perp AD$. Тогда MNK — искомые сечения. Причем заметим, что $MN = NK$ и, так как точка O — *середина* MK, то NO — высота $\triangle MNK$ (рис. 181).

Заметим, что $AM = \dfrac{2}{3}AC = \dfrac{2}{3}a$ и в $\triangle MNA$: $\angle MNA = 90°$; $\angle NAM = 60°$; поэтому $\angle NMA = 30°$, а катет противолежащий углу в $30°$ равен половине гипотенузы, поэтому $AN = \dfrac{1}{3}a$.

$AO = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2}{3}\cdot a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Так как $\triangle ONA$ — прямоугольный, то $NO = \sqrt{AO^2 - AN^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}a$; $MK = \dfrac{2}{3}BC = \dfrac{2}{3}a$;

$$S_{MNK} = \frac{1}{2}NO\cdot MK = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{9}a^2.$$

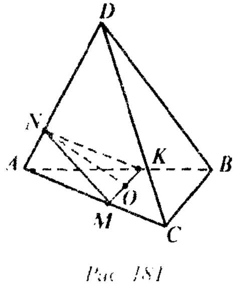


Рис. 181

№ 284. Указание: В результате отсечения от каждой грани остается по равностороннему треугольнику, и от каждого угла при вершине остается по треугольнику. Таким образом получается многогранник, составленный из восьми правильных равных треугольников. Осталось доказать, что это октаэдр.

№ 285. Указание: Доказать из подобия треугольников, что отрезки, соединяющие центры граней равны одной трети от ребра тетраэдры (см. зад. 286 б).

№ 286. В тетраэдре $DABC$:
$AD = m$, $DO_2 = h$; $O_1O_2 = n$, где O_2, O_1 — центры граней ABC и DBC.

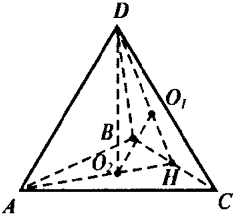


Рис. 182

а) $AH = AB \cdot \cos \angle ABH = m\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$AO_2 = \frac{2}{3}AH = \frac{\sqrt{3}}{3}m;$$

$$DO_2 = \sqrt{m^2 - \frac{1}{3}m^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}m,$$

$$h = \frac{\sqrt{6}}{3}m, m = \frac{\sqrt{6}}{2}h.$$

б) Заметим, что в плоскости ADH треугольники ADH и O_2O_1H подобны, так как

$\dfrac{AH}{O_2H} = \dfrac{DH}{O_1H} = \dfrac{3}{1}$ и $\angle DHA$ — общий.

Тогда $O_2O_1 = \dfrac{1}{3}AD$, таким образом $n = \dfrac{1}{3}m$.

№ 287. Указание:

а) В октаэдре $MABCDM_1$ расстояние MM_1 — диагональ квадрата $MACM_1$.

б) Провести медианы этих граней к общему ребру. Тогда доказать, что искомые расстояния — треть расстояния между противоположными вершинами октаэдра.

в) Доказать, что эти грани параллельны, и найти расстояние между медианами этих граней.

Вопросы к главе III

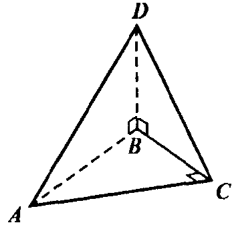


Рис. 183

1. Наименьшее число ребер имеет тетраэдр — 6.

2. (n – 2) — угольник.

3. Да, является.

4. В прямой призме.

5. Нет, она может быть и не прямой.

6. Да, если эта грань перпендикулярна основаниям.

7. а) да. б) нет.

8. По теореме п. 27 получаем, что боковые поверхности относятся, как 5 : 3

9. Да

10. Две.

11. Нет, иначе бы через вершину пирамиды проходили бы как минимум две прямые, перпендикулярные основаниям.

12. Да (рис 183).

$DB \perp AB$, $DB \perp BC$ и $BC \perp AC$, тогда $DC \perp AC$.

13. Нет, так как длина каркаса по крайней мере $40 + 20\sqrt{2} > 66$.

14. На тетраэдр и четырехугольную пирамиду.

Дополнительные задачи

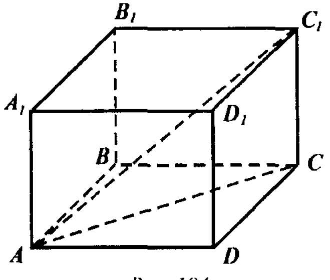


Рис. 184

№ 288. Предположили, что дана призма с n-угольником в основании.

Тогда количество вершин равно $n + n = 2n$, а количество ребер складывается из n ребер нижнего основания, n ребер верхнего основания и n боковых ребер. Таким образом количество ребер равно 3 n.

№ 289. Пусть сторона куба равна a. Тогда $d^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$.

$S_{полн\ пов.} = 2(a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a) = 2(a^2 + a^2 + + a^2) = 6\,S_{грани} = 6a^2 =$
$= 2d^2$.

№ 290. Найдем стороны параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1$. $\angle CAD = \varphi$, $AC = l$, $\angle C_1AD = \theta$.

Тогда: $AD = AC \cdot \cos\angle CAD = l\cos\varphi$; $CD = l\sin\varphi$

$$AC_1 = \frac{AD}{\cos\angle C_1AD} = \frac{l\cos\varphi}{\cos\theta};\ CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = l\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\theta} - 1}.$$

Тогда $S_{бок.пов} = 2\,(AD \cdot DD_1 + CD \cdot DD_1)$

$$S_{бок.пов} = 2\left(l^2\cos\varphi\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\theta} - 1} + l^2\sin\varphi\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\theta} - 1}\right).$$

№ 291. Аналогично задаче 290.

№ 292. Найдем расстояние между C_1D_1 и A_1C. Для этого надо провести через A_1C плоскость, параллельную C_1D_1. Эта плоскость A_1B_1CD.

Найдем расстояние от C_1D_1 до плоскости A_1B_1CD. Оно равно расстоянию от точки D_1 до плоскости A_1B_1CD.

Проведем высоту D_1H в $\triangle A_1D_1D$. Тогда из того, что $D_1H \perp A_1D$ и $D_1H \perp A_1B_1$ (так как A_1B_1 перпендикулярна плоскости AA_1D_1D) следует, что D_1H — расстояние от точки D_1 до плоскости A_1B_1CD, так как $D_1H \perp A_1B_1CD$.

Найдем D_1H: Пусть $A_1H = x$, тогда
$D_1H^2 = A_1D_1^2 - A_1H^2 = DD_1^2 - DH^2 = 6^2 - x^2 = 8^2 - (10 - x)^2$; $x = 3,6$. Тогда
$D_1H = \sqrt{36 - 12,96} = 4,8$.

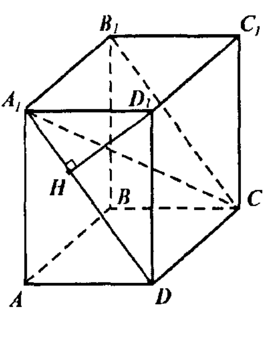


Рис. 185

№ 293. Заметим, что BB_1D_1D — прямоугольник, а так как диагонали перпендикулярны, то это квадрат.

Пусть $AB = a$. Тогда
$BD = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Поэтому
$BB_1 = AA_1 = CC_1 = DD_1 = a\sqrt{2}$.

Рассмотрим прямоугольник A_1B_1CD:
$A_1B_1 = a$, $A_1D = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$.

Тогда $A_1C = B_1D = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$, но диагонали точкой пересечения делятся пополам, поэтому $A_1O = B_1O = a$, где O — точка пересечения диагоналей A_1C и B_1D прямоугольника A_1B_1CD.

Поэтому в $\triangle A_1OB_1$ все стороны равны a, поэтому $\angle A_1OB_1 = 60°$, что и требовалось доказать.

№ 294. Указание: Полученное сечение является прямоугольником, причем сторона, лежащая в основании призмы, равна $a\sqrt{2}$. Отсюда находится боковое ребро.

№ 295. а) Так как $\angle C_1CB = \angle C_1CD$, то проекция C_2 точки C_1 на плоскость $ABCD$ попадает на биссектрису $\angle BCD$ (рис.186). Но биссектриса угла BCD — это AC и значит $C_2C \perp BD$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах следует, что $CC_1 \perp BD$.

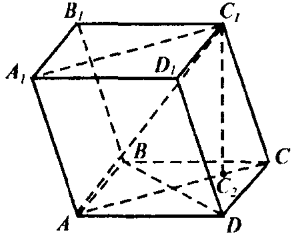


Рис. 186

б) BB_1D_1D — параллелограмм и $BB_1 \perp BD$ (так как $BB_1 \parallel CC_1$ и $CC_1 \perp BD$), значит BB_1D_1D — прямоугольник.

в) $BD \perp A_1C$ (так как $BD \perp AC$ как диагонали ромба) и $BD \perp AA_1$ (так как $BD \parallel CC_1$). Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости следует, что $BD \perp AA_1C_1$.

г) Плоскость BB_1D_1 проходит через прямую B_1D_1, перпендикулярную к плоскости AA_1C_1, так как $B_1D_1 \parallel BD$ и $BD \perp AA_1C_1$.

Поэтому по теореме п. 23 следует, что $AA_1C_1 \perp BB_1D_1$.

№ 296. M — середина AB; N — середина BC проведем плоскость через MN и A_1C_1 (рис. 187).

Проведем высоту BH в $\triangle ABC$. BH пересекает MN в точке K. $BK \perp MN$, так как $MN \parallel AC$ и проведем высоту HH_1 призмы. Так как призма правильная, то H_1 — середина A_1C_1, так как H — середина AC.

Таким образом $\angle H_1KH = \varphi$; $HH_1 = h$

Тогда $H_1K = \dfrac{HH_1}{\sin\angle H_1KH} = \dfrac{h}{\sin\varphi}$,

$KH = h \cdot \operatorname{ctg}\varphi \cdot$

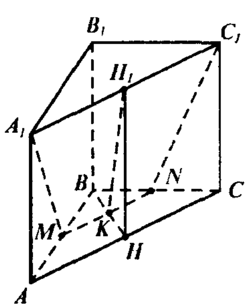


Рис. 187

Заметим, что $BH = 2\ KH = 2\ h\,\mathrm{ctg}\,\varphi$.

$$BC = \frac{BH}{\sin\angle BCH};\ BC = \frac{2h\,\mathrm{ctg}\,\varphi}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}h\,\mathrm{ctg}\,\varphi \text{ и } BC = A_1C_1.$$ Таким

образом $MN = \frac{1}{2}AC = \frac{2\sqrt{3}}{3}h\,\mathrm{ctg}\,\varphi$. Заметим, что $H_1K \perp MN$. Так как A_1C_1NM — трапеция, $A_1C_1 \parallel MN$, то

$$S_{A_1C_1NM} = \frac{1}{2}(A_1C_1 + MN)\cdot H_1K = \sqrt{3}h\,\mathrm{ctg}\,\varphi\cdot\frac{h}{\sin\varphi} = \frac{h^2\sqrt{3}\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Ответ: $\frac{h^2\sqrt{3}\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$.

№ 297. а) $A_1C_1 \perp BD$, так как $A_1C_1 \parallel AC$ и $AC \perp BD$, и $A_1O \perp A_1C_1$, так как $A_1O \perp AC$ и $AC \parallel A_1C_1$. Поэтому по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $A_1C_1 \perp DA_1B$. Значит по теореме п. 23 следует, что $AA_1C_1 \perp A_1BD$.

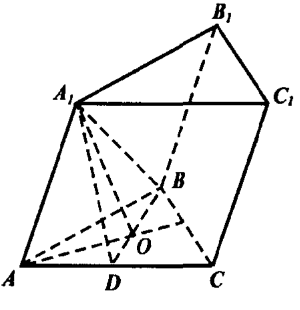


Рис. 188

б) Аналогично п. а) $BC \perp AA_1O$. Поэтому по теореме п. 23 $AA_1O \perp BB_1C$.

в) AO — проекция AA_1 на плоскость ABC и $AO \perp BC$. Следовательно по теореме о трех перпендикулярах $AA_1 \perp BC$ и, так как $AA_1 \parallel BB_1$, то $BB_1 \perp BC$.

Значит параллелограмм BB_1C_1C является прямоугольником.

№ 298. Указание: Найти высоту боковой грани. Она равна $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.

№ 299. $S_{\text{основания}} = \frac{1}{2}m\cdot m\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}m^2$. $S_{\text{бок. пов.}} = 3\left(\frac{1}{2}h\cdot m\right)$, где h — высота боковой грани. Таким образом $\frac{3}{2}h\cdot m = \frac{\sqrt{3}}{2}m^2$, $h = \frac{\sqrt{3}}{3}m$. Тогда высота DO пирамиды $DABC$ равна $DO = \sqrt{DH^2 - \left(\frac{1}{3}AH\right)^2}$, где H — середина стороны BC основания пирамиды.

Т. о. $DO = \sqrt{h^2 - \left(\frac{1}{3}m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}m^2 - \frac{1}{12}m^2} = \sqrt{\frac{m^2}{4}} = \frac{m}{2}$.

№ 300. Прямая AC параллельна плоскости сечения, поэтому линия пересечения плоскостей ACD и PFE параллельна AC. Проведем прямую $PH \parallel AC$. Таким образом H — середина DC. $PFEH$ искомое сечение.

$PF \parallel BD$, $HE \parallel DB$ и $PF = HE = \frac{1}{2}DB$, поэтому $PFEH$ — параллелограмм.

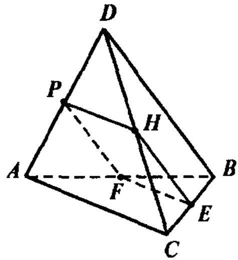


Рис. 189

$PF \parallel DB$; $PH \parallel AC$ и $AC \perp BD$ (по задаче 261), поэтому $PF \perp PH$. Значит $PFEH$ — прямоугольник.

$PH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a$; $PF = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}b$; $S_{сеч.} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b = \frac{ab}{4}$.

№ 301. Указание. Провести высоту BM в грани BDA. Тогда CM — высота $\triangle DCA$ и значит $\angle BMC = 120°$. Тогда из $\triangle BMC$ находится BC, так как $BM = MC = 16$ см. Далее из $\triangle AMB$ находится $\cos \angle BAM$. И из $\triangle ADB$ находится DK, где K — середина AB.

№ 302. Рассмотрим пирамиду $PABCD$. Пусть $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AC = 6$ см.

Так как ABC — параллелограмм, то $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$. Отсюда $BD = \sqrt{80} = 2\sqrt{20}$. Таким образом $AO = OC = 3$ см. $BO = OD = \sqrt{20}$ см

По теореме Пифагора

$PA = PC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ см

$PB = PD = \sqrt{4^2 + \left(\sqrt{20}\right)^2} = 6$ см.

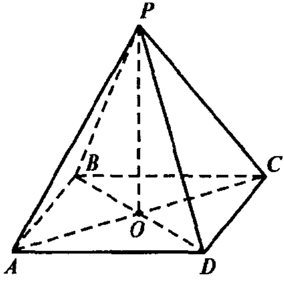


Рис. 190

№ 303. Указание: Воспользоваться тем, что прямая по которому пересекаются две боковые грани, перпендикулярные к плоскости основания, перпендикулярно к основанию, а значит один из углов ромба равен 120°.

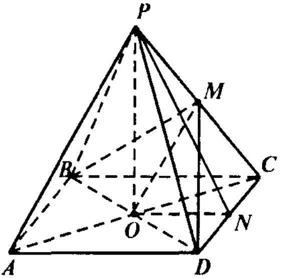


Рис. 191

№ 304. Рассмотрим пирамиду $PABCD$. O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ (рис. 191). M — середина PC. N — середина CD.

Так как $\angle CPD = 60°$, то равнобедренный треугольник CPD является равносторонним. Поэтому все ребра пирамиды равны между собой. $BM = MD$, поэтому медиана MO является биссектрисой $\triangle BMD$. $\angle DMO = \frac{1}{2}\angle DMB$.

Докажем, что $\triangle DMO = \triangle PNO$. Действительно, $PN = MD$ — как медианы равностороннего $\triangle\ DPC$. $NO = \frac{1}{2}AD$, $MO = \frac{1}{2}AP$, как средние линии треугольников CAD и CPA. Поэтому $NO = MO$. Тогда $\triangle DMO = \triangle PNO$ по катету и гипотенузе. Значит $\angle PNO = \angle DMO = \frac{1}{2}\angle DMB$. Но $\angle PNO$ — угол между боковой гранью и основанием, а $\angle DMB$ — линейный угол двугранного угла при боковом ребре.

Таким образом, требуемое утверждение доказано.

№ 305. По задаче 256 п. а). $h = a\sqrt{\cos\alpha}\,/\,2\sin\frac{\alpha}{2}$, где a сторона основания. Отсюда $a = 2h\sin\frac{\alpha}{2}\,/\,\sqrt{\cos\alpha}$. Диагональ основания равна $a\sqrt{2}$. Тогда боковое ребро равно:

$$\sqrt{h^2 + \frac{2h^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}} = h\sqrt{\frac{\cos\alpha + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}} = h\sqrt{\frac{\cos\alpha - 1 + 1 + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}} =$$

$$= h\sqrt{\frac{\cos\alpha + 1 - \cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{h}{\sqrt{\cos\alpha}}.$$ Тогда

$$S_{\text{бок. пов}} = 4 \cdot S_{\text{бок. грани}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha = 2\,h^2 \operatorname{tg}\alpha.$$

№ 306. Пусть M — середина ребра CD пирамиды $PABCD$. Тогда проекция O_1 точки O на плоскость PCD попадает на прямую PM (т.к. $CD \perp POM$ и иначе через точку P проходило бы две плоскости, перпендикулярные к прямой CD).

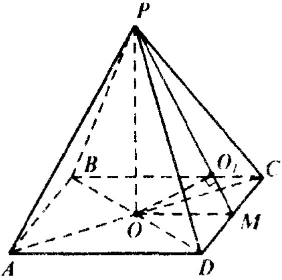


Рис. 192

Таким образом, $\angle OPM = \varphi$.

Тогда $OM = \dfrac{1}{2} AD = h \cdot \operatorname{tg}\varphi$;

$AD = 2\,h \operatorname{tg}\varphi$; $PM = \dfrac{h}{\cos\varphi}$. Таким образом,

$$S_{\text{полн. пов}} = 4\,h^2\, tg^2\,\varphi + 2\,\frac{h}{\cos\varphi} \cdot 2\,h \operatorname{tg}\varphi = 4\,h^2 \operatorname{tg}^2\varphi + 4h^2\,\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

№ 307. а) Пусть точка K — середина MC. Тогда $OK \parallel AM$, поэтому точка K лежит в плоскости α. BKD — искомое сечение. $BK = DK$ (т.к. $\triangle MBC = \triangle MDC$). Поэтому $OK \perp BD$.

Из $\triangle CAM$: KO — средняя линия, значит

$$OK = \frac{1}{2} AM,\ BD = \sqrt{2}a.$$

$$S_{\triangle BKD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{ab\sqrt{2}}{4}.$$

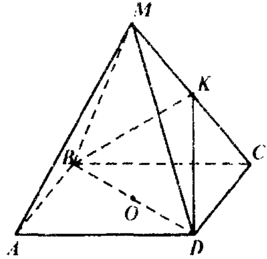


Рис. 193

б) Рассмотрим MM_1 — перпендикуляр к плоскости BKD и проведем плоскость M_1MC. По теореме п. 23 видно $CMM_1 \perp BDK$, поэтому CC_1 — перпендикуляр к BDK также лежит в плоскости MM_1C. Таким образом C_1, K, M_1 — лежат на одной прямой. Но тогда $\angle MKM_1 = \angle CKC_1$ (как вертикальные) и $\triangle MKM_1 = \triangle CKC_1$ (по гипотенузе и острому углу).

Значит $MM_1 = CC_1$, что и требовалось доказать.

№ 308. Аналогично задаче 239.

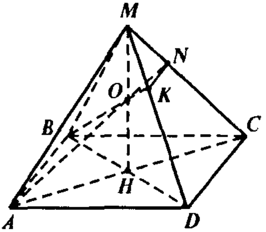


Рис. 194а

№ 309. Пусть MH — высота пирамиды $MABCD$. O — середина MH. Проведем сечение через сторону $AB = 6$ дм и точку O.

Так как точки A, O, H, M, C лежат в одной плоскости MAC, то прямая AO лежит и в плоскости сечения и в плоскости MAC. Поэтому точка N — точка пересечения AO и MC, также лежит в плоскости сечения.

Аналогично точка K — точка пересечения BO и MD тоже принадлежит сечению Таким образом $ABNK$ — искомое сечение (рис. 194а).

Докажем, что $\triangle AOB \sim \triangle NOK$. Действительно: $\angle AOB = NOK$. Докажем, что $\frac{AO}{ON} = \frac{3}{1}$.

Рассмотрим $\triangle MAC$ (рис. 194б). Проведем OO' — среднюю линию $\triangle MHC$ и OE — параллельно AC. Тогда из того, что $\angle OAO' = = \angle NOE$ и $\angle AOO' = \angle ONE$ следует, что $\triangle AOO' \sim \triangle ONE$. Значит $\frac{AO}{ON} = \frac{AO'}{OE}$, но $OE = O'C$ (так как $OECO'$ — параллелограмм), а $O'C = \frac{1}{2}CH= = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{3}AO'$. Поэтому $\frac{AO}{ON} = \frac{AO'}{O'C} = \frac{3}{1}$. Аналогично рассматривая $\triangle MBD$ получаем, что $\frac{BO}{OK} = \frac{3}{1}$. Поэтому $\triangle AOB \sim \triangle NOK$ и коэффициент подобия равен 3. Так как $AB = 6$ дм, то $NK = 2$ дм. Очевидно, что $AB \parallel NK$. Поэтому $ABNK$ — трапеция. Проведем высоту FOG трапеции $ABNK$ через точку O (рис. 195).

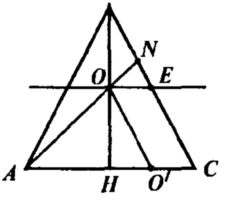


Рис. 194б

Тогда $OG = \sqrt{OH^2 + HG^2} = \sqrt{9+16} = 5$ дм, т. к. $OH = \frac{1}{2}MH = 3$ дм, а $HG = \frac{1}{2}BC = 4$ дм.

Тогда из подобия треугольников AOB и NOK следует, что

$OF = \frac{1}{3} OG = \frac{5}{3}$ дм. Таким образом:

$S_{ABNK} = \frac{1}{2}(AB + NK) \cdot FG = \frac{1}{2}(AB - NK) \times$

$\times (OG + OF)$

$S_{ABNK} = \frac{1}{2}(6 + 2)(5 + \frac{5}{3}) = \frac{80}{3}$ дм^2.

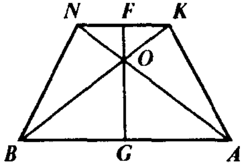


Рис. 195

№ 310. Аналогично задаче 243.

№ 311. а) $\triangle DAC$ и $\triangle DAB$ — прямоугольные.

$DC = \sqrt{9^2 + 13^2} = 5\sqrt{10}$;

$DB = \sqrt{9^2 + 15^2} = 3\sqrt{34}$ см.

Проведем высоту AH в $\triangle ABC$. Тогда DH — высота $\triangle BDC$ по теореме о трех перпендикулярах.

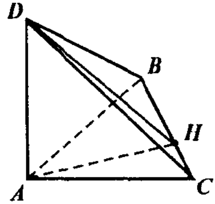


Рис. 196

Найдем AH: Пусть $BH = x$.

$AH^2 = AC^2 - CH^2 = AB^2 - BH^2$.

$13^2 - (14 - x)^2 = 15^2 - x^2$;

$169 - 196 + 28x = 225$;

$28x = 252$; $x = 9$. Таким образом, $AH = \sqrt{225 - 81} = 12$ см,

$DH = \sqrt{81 + 144} = 15$ см

$S_{полн\ пов} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle DAB} + S_{\triangle DAC} + S_{\triangle DBC}$

$S_{полн\ пов} = \frac{1}{2}(12 \cdot 14 + 9 \cdot 15 + 9 \cdot 13 + 15 \cdot 14) = \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 14 = 45 \cdot 7 = 315$ см^2.

б) Предположим, что основание перпендикуляра AA_1 не попадает на прямую DH. Тогда $BC \perp DA_1A$ и $BC \perp ADH$, т. к. $BC \perp DA$ и $BC \perp AA_1$ в первом случае и $BC \perp DH$ во втором. Но тогда через AD проходят две плоскости, перпендикулярные к BC. Это невозможно, поэтому A_1 лежит на DH.

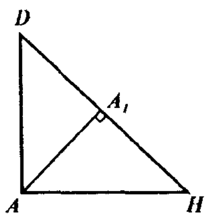


Рис. 197

Рассмотрим $\triangle DAH$: $DA = 9$ см, $AH = 12$ см, $DH = 15$ см

Найдем AA_1: пусть $DA = x$

$9^2 - x^2 = 12^2 - (15 - x)^2$; $2 \cdot 81 = 30x$; $x = \frac{2 \cdot 27}{10}$

$$AA_1 = \sqrt{81 - \left(\frac{27}{5}\right)^2} = \sqrt{51{,}84} = 7{,}2 \text{ см}.$$

№ 312. Проведем PH — апофему грани PA_1A_2. Тогда H — середина A_1A_2 и $OH \perp A_1A_2$ (т. к. $OA_1 = OA_2$) (рис. 198). Поэтому $\angle PHO = \varphi$.

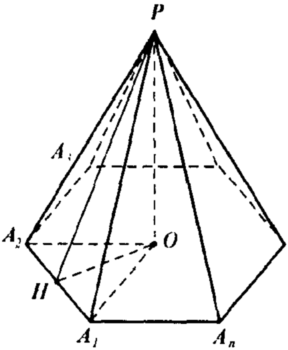


Рис. 198

Пусть $OH = r$. Тогда $PO = tg\,\varphi \cdot r$

$$OA_1 = \frac{OH}{\cos\angle AOH}$$

$$OA_1 = \frac{r}{\cos\left(\frac{360^\circ}{n}:2\right)} = \frac{r}{\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

$$\operatorname{tg}\angle PA_1O = \frac{PO}{OA_1}$$

$$\operatorname{tg}\angle PA_1O = \frac{\operatorname{tg}\varphi \cdot r}{r / \cos\frac{180^\circ}{n}} = \operatorname{tg}\varphi \cdot \cos\frac{180^\circ}{n}.$$

№ 313. Достроим эту усеченную пирамиду до правильной пирамиды $PABC$ и проведем высоту PH_1H, где $H_1 \in A_1B_1C_1$, $H \in ABC$ (рис. 199).

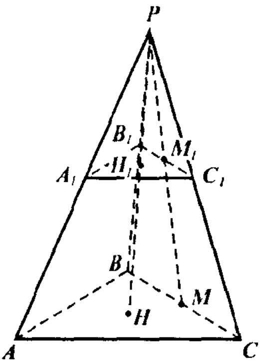


Рис. 199

Так как $A_1C_1 = \frac{1}{2}AC$ и $A_1C_1 \parallel AC$, то

A_1C_1 — средняя линия $\triangle PAC$. Поэтому $AA_1 = A_1P$; $CC_1 = C_1P$. Аналогично $BB_1 = B_1P$. Но тогда $PH_1 = HH_1 = 1$ дм. Проведем апофему PM_1M грани PCB. $PM_1 = M_1M$. Найдем PM_1:

$$H_1M_1 = \frac{1}{3}A_1M_1$$

(так как H_1 — центр $\triangle A_1B_1C_1$).

$$H_1M_1 = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

$PM_1 = \sqrt{PH_1^2 + H_1M_1^2} = \sqrt{1+3} = 2$ дм. Значит, $MM_1 = 2$ дм.

$$S_{\text{бок. пов}} = 3 \cdot \frac{6+12}{2} \cdot 2 = 54 \text{ дм}^2.$$

№ 314. Проведем высоту A_1H и апофемы A_1M и A_1K граней AA_1D_1D и AA_1B_1B. Тогда $AKHM$ — квадрат.

$HM = \sqrt{65^2 - 63^2} = \sqrt{256} = 16$ см

Пусть $A_1D_1 = 3x$, тогда $AD = AB = 7x$. Таким образом $AK = (AB - A_1B_1)/2 = 2x$; $x = 8$ см. Таким образом $AD = 56$ см, $A_1D_1 = 24$ см.

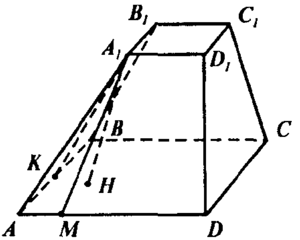


Рис. 200

№ 315. Если соединить центр грани октаэдра с центрами смежных граней (т.е. имеющих общее ребро с данной гранью), то получится многогранник у которого каждая грань очевидно квадрат и в каждой вершине сходится по 3 ребра. Таким образом, это куб.

№ 316. Аналогично 315.

№ 317. Аналогично задаче 315.

№ 318. 1) Найдем косинус двугранного угла тетраэдра:

Пусть ребро тетраэдра $DABC$ равно a. Проведем высоту DH и апофему DM грани DAC.

Тогда $\angle DMH$ — линейный угол двугранного угла правильного тетраэдра.

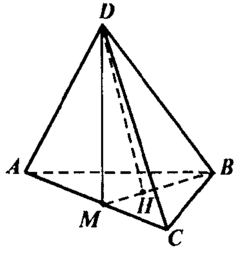


Рис. 201а

$$\cos \angle DMH = \frac{MH}{DM} = \frac{\frac{1}{3}BM}{DM} = \frac{\frac{1}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, где α — двугранный угол тетраэдра.

2) Найдем косинус половины двугранного угла правильного октаэдра $MABCDN$:

Проведем апофему MH грани MAD и пусть MN пересекает плоскостью $ABCD$ в точке O. Тогда точка O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ и $MO \perp ABCD$.

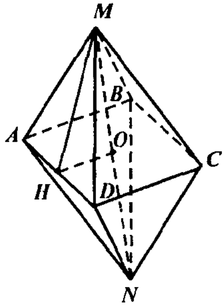


Рис. 201б

Поэтому $MH \perp AD$ и $OH \perp AD$, следовательно, $\angle MHO$ — линейный угол двугранного угла $OH = \frac{1}{2}AB$, $MH = MA \cdot \cos 60° = MA \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Таким образом $\cos \angle MHO = \frac{OH}{MH} = \frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}MA} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Таким образом $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, где β — половина двугранного угла правильного октаэдра. Тогда $\alpha + 2\beta$ — сумма двугранных углов тетраэдра и октаэдра.

$\cos(\alpha + 2\beta) = \cos\alpha \cdot \cos 2\beta - \sin\alpha$ $(\sin 2\beta = \cos\beta\,(2\cos^2\beta - 1) - \sin\alpha \cdot 2\sin\beta\,(\cos\beta = \frac{1}{3}(2 \cdot \frac{1}{3} - 1) - \sqrt{1 - \frac{1}{9}} \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{9} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = -1.$

Поэтому $\alpha + 2\beta = 180°$, что и требовалось доказать.

Глава IV. Векторы в пространстве

§ 1. Понятие вектора в пространстве

№ 320. а) (рис. 202)

$|\overrightarrow{AB}| = AB = 3$ см $|\overrightarrow{NM}| = NM = \frac{1}{2}AB = 1{,}5$ см

$|\overrightarrow{BC}| = BC = 4$ см $|\overrightarrow{BN}| = BN = \frac{1}{2}BC = 2$ см

$|\overrightarrow{BD}| = BD = 5$ см. $|\overrightarrow{NK}| = NK = \frac{1}{2}BD = 2{,}5$ см.

б) Аналогично п. а).

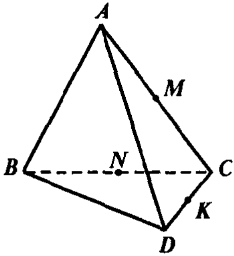


Рис. 202

№ 321. а) $|\overrightarrow{CC_1}| = CC_1 = AA_1 = 12$ см

$|\overrightarrow{CB}| = CB = AD = 8$ см

$|\overrightarrow{CD}| = CD = AB = 9$ см.

б) $|\overrightarrow{DC_1}| = DC_1 = \sqrt{DC^2 + CC_1^2}$

$|\overrightarrow{DC_1}| = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ см

$|\overrightarrow{DB}| = DB = \sqrt{AB^2 + AD^2}$

$|\overrightarrow{DB}| = \sqrt{9^2 + 8^2} = \sqrt{145}$ см

$|\overrightarrow{DB_1}| = DB_1 = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA_1^2}$

$|\overrightarrow{DB_1}| = \sqrt{9^2 + 8^2 + 12^2} = 17$ см.

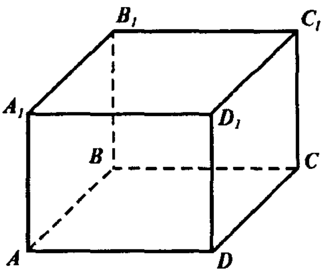


Рис. 203

№ 322.

а) $\overrightarrow{D_1A_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{C_1B_1}$, $\overrightarrow{D_1A_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB}$,

$\overrightarrow{C_1B_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DK} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CM}$

б) $\overrightarrow{AA_1} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{D_1A_1}$,

$\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{C_1B_1}$, $\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

в) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{D_1A_1}$, $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{DK}$.

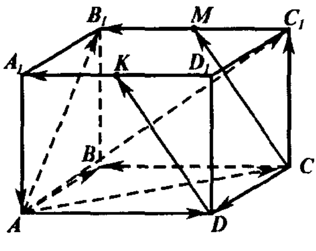


Рис. 204

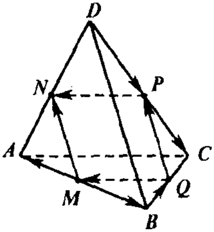


Рис. 205

№ 323. а) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, т. к. $MN \parallel DB$, $MN = \frac{1}{2}DB$, $PQ \parallel DB$, $PQ = \frac{1}{2}OB$. Поэтому $MN = PQ$ и $MN \parallel PQ$. Лучи MN и PQ сонаправлены (рис. 205).

Аналогично $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{QM}$, $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PC}$

б) Так как $MN \parallel PQ$ и $MN = PQ$, то $MNPQ$ — параллелограмм, а так как $MN = \frac{1}{2}DB = \frac{1}{2}AC = NP$, то $MNPQ$ — ромб. Также из того, что $AC \perp DB$ и $MN \parallel DB$; $NP \parallel AC$ следует, что $MNPQ$ — квадрат.

№ 324. а) Да, так как две прямые, параллельные третьей, параллельные между собой.

б) Да, они коллинеарны и сонаправлены.

в) Нет, так как можно рассмотреть два противоположно направленные вектора; они коллинеарны, но не сонаправлены.

№ 325. а) Так как $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$, то $AA_1 = BB$, и $AA_1 \parallel BB_1$, таким образом AA_1B_1B —параллелограмм, следовательно $AB \parallel A_1B_1$.

б) Так как плоскость проходит через прямую A_1 B_1, то AB либо параллельна плоскости, либо лежит в ней.

в) Эти плоскости могут пересекаться, могут быть параллельными, и могут совпадать.

№ 326. а) (рис. 204) Так как $DD_1 \parallel CC_1$, то искомый вектор лежит на прямой CC_1, причем направлен должен быть в ту же сторону, что и $\overrightarrow{DD_1}$, т.е. в сторону точки C_1. А так как длины совпадают, то искомый вектор — это $\overrightarrow{CC_1}$.

б) Так как $DK = CK$ и $DK \parallel CK$, то $DK = CM$, таким образом DK — искомый вектор.

в, г, д) аналогично пп. а, б).

§ 2. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число

№ 327. а) (рис. 204)

Так как $\vec{A_1D_1} = \vec{BC}$, то $\vec{AB} + \vec{A_1D_1} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

б) $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC_1} = \vec{AC_1}$

в) $\vec{DA} + \vec{B_1B} = \vec{DA} + \vec{D_1D} = \vec{D_1D} + \vec{DA} = \vec{D_1A}$

г) $\vec{DD_1} + \vec{DB} = \vec{DD_1} + \vec{D_1B_1} = \vec{DB_1}$

д) $\vec{DB_1} + \vec{BC} = \vec{DB_1} + \vec{B_1C_1} = \vec{DC_1}$

№ 328. Указание: Воспользоваться тем, что для любых трех точек M, N, K верно равенство $\vec{MN} + \vec{NK} = \vec{MK}$.

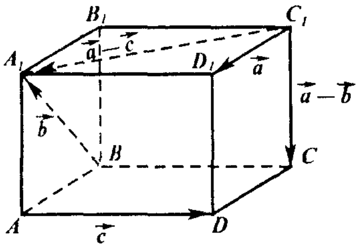


Рис. 206

№ 329. а) $\vec{BC}$, $\vec{AD}$, $\vec{A_1D_1}$, $\vec{B_1C_1}$ (рис. 206).

б) $\vec{AB_1}$, $\vec{DC_1}$.

в) Вектора равные $-\vec{DC}$, равны $\vec{CD}$, таким образом, это векторы $\vec{CD}$, $\vec{BA}$, $\vec{B_1A_1}$, $\vec{C_1D_1}$.

г) Аналогично п. в).

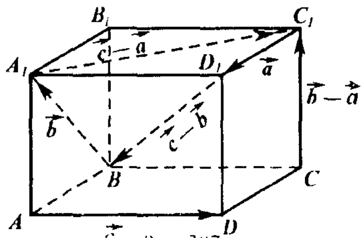


Рис. 207

№ 330. а) Вектор $\vec a - \vec b$ это вектор, который при сложении с вектором $\vec b$ дает вектор $\vec a$ (рис. 206).

$\vec b = \vec{BA_1} = \vec{CD_1}$, $\vec a = \vec{C_1D_1}$, поэтому $\vec a - \vec b = \vec{C_1C}$.

б, в, г, д) Аналогично (рис. 207).

№ 331. а) По определению $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$, а $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DC}$ (см. п. 36). Тогда так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (так как $ABCD$ — параллелограмм), то $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

б) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB}$, а $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$. Значит $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DA}$.

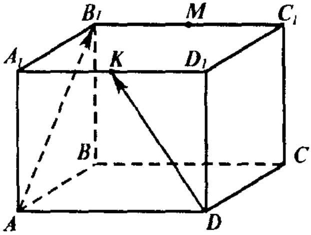


Рис. 208

№ 332. По определению
$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{A_1A}$,
так как $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB_1}$.

Так как $\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KD_1} = \overrightarrow{DD_1}$, то $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DD_1} - \overrightarrow{KD_1} = \overrightarrow{D_1K} - \overrightarrow{D_1D}$.

№ 333. С помощью сочетательного и переместительного закона получаем цепочку равенств.

а) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DB} + + \overrightarrow{BD} = 0$.

б) $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$

№ 334. а) $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KK_1} = \overrightarrow{MK_1}$ (рис. 209).

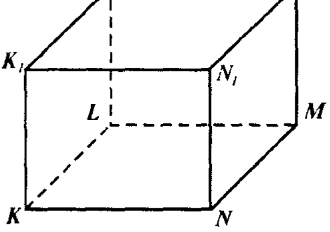


Рис. 209

$\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{M_1K}$

Но $|\overrightarrow{MK_1}| = |\overrightarrow{M_1K}|$, так как это длины диагоналей прямоугольного параллелепипеда, а они равны.

б) $\overrightarrow{K_1L_1} - \overrightarrow{NL_1} = \overrightarrow{NM} - \overrightarrow{NL_1} = \overrightarrow{L_1M}$

$\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LL_1} = \overrightarrow{ML_1}$,

$|\overrightarrow{L_1M}| = |\overrightarrow{ML_1}| = ML_1$ (рис. 209).

Таким образом $|\overrightarrow{K_1L_1} - \overrightarrow{NL_1}| = |\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{MM_1}|$

в) $\overrightarrow{NL} - \overrightarrow{M_1L} = \overrightarrow{NL} + \overrightarrow{LM_1} = \overrightarrow{NM_1}$; $\overrightarrow{K_1N} - \overrightarrow{LN} = \overrightarrow{K_1N} + \overrightarrow{NL} = \overrightarrow{K_1L}$

Но $|\overrightarrow{NM_1}| = |\overrightarrow{N_1M}|$, так как NN_1M_1M — прямоугольник, а у прямоугольника диагонали равны. Также $|\overrightarrow{N_1M}| = |\overrightarrow{K_1L}|$, так как $\overrightarrow{N_1M} = \overrightarrow{K_1L}$. Таким образом $|\overrightarrow{NM_1}| = |\overrightarrow{K_1L}|$.

№ 335. а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}) + \overrightarrow{PQ} = 0 + 0 + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}$

б) $\overrightarrow{FK} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{QK} + \overrightarrow{PF} = (\overrightarrow{FK} + \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{PF}) + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QK}) = = 0 + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AK}$.

в) $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MP} = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MP}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{CP} + 0 = \overrightarrow{CP}$.

г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{NM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}) = 0 + 0 + 0 = 0$.

№ 336. а) Воспользуемся правилом многоугольника сложения векторов

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BD}$, это и есть требуемое разложение.

б) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$.

в) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$.

№ 337. а) $\vec{OP} - \vec{EP} + \vec{KD} - \vec{KA} = (\vec{PE} - \vec{PO}) + (\vec{KD} - \vec{KA}) = \vec{OE} + \vec{AD}$.

б) $\vec{AD} + \vec{MP} + \vec{EK} - \vec{EP} - \vec{MD} = \vec{AD} + (\vec{MP} - \vec{MD}) + (\vec{EK} - \vec{EP}) = \vec{AD} + \vec{DP} + \vec{PK} = \vec{AK}$.

в) $\vec{AC} - \vec{BC} - \vec{PM} - \vec{AP} + \vec{BM} = \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{BM} + \vec{MP} - \vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP} - \vec{AP} = \vec{AP} - \vec{AP} = \vec{0}$.

№ 338. Докажем, что $\vec{OA} - \vec{OA_1} = \vec{OC} - \vec{OC_1}$. Действительно, $\vec{OA} - \vec{OA_1} = \vec{A_1A} = \vec{C_1C} = \vec{OC} - \vec{OC_1}$. Поэтому перенося слагаемое $\vec{OA_1}$ вправо, а $\vec{OC_1}$ влево получаем, что $\vec{OA} + \vec{OC_1} = \vec{OC} + \vec{OA_1}$, что и требовалось доказать.

№ 339. а) Выразим из данного равенства вектор $\vec{x}$:

$\vec{x} = \vec{DB} - \vec{DC} - \vec{D_1A_1} - \vec{CD_1} - \vec{A_1C_1} = \vec{CB} - \vec{D_1A_1} - \vec{CD_1} - \vec{A_1C_1} = \vec{D_1B} - \vec{D_1A_1} - \vec{A_1C_1} = = \vec{A_1B} - \vec{A_1C_1} = \vec{C_1B}$, таким образом $\vec{x} = \vec{C_1B}$.

б) Аналогично п. а).

№ 340. а) Выразим вектор $\vec{x}$:

$\vec{x} = \vec{AA_1} + \vec{B_1C} - \vec{BA} = \vec{BB_1} + \vec{B_1C} - \vec{BA} = \vec{BC} - \vec{BA} = \vec{AC}$, таким образом $\vec{x} = \vec{AC}$.

б) $\vec{x} = \vec{AB} - \vec{AC_1} + \vec{BB_1} = \vec{C_1B} + \vec{BB_1} = \vec{C_1B} + \vec{CC_1} = \vec{CC_1} + \vec{C_1B} = \vec{CB}$, таким образом $\vec{x} = \vec{CB}$.

в) $\vec{x} + \vec{x} = \vec{AC_1} - \vec{AB_1} + \vec{BC_1} = \vec{B_1C_1} + \vec{BC_1} = \vec{B_1B} + \vec{BC} + \vec{BC} + \vec{CC_1} = \vec{B_1B} + 2\vec{BC} + \vec{BB_1} = 2\vec{BC}$, т. о., $2\vec{x} = 2\vec{BC}$, значит $\vec{x} = \vec{BC}$.

№ 341. Докажем, что $\vec{PA} - \vec{PO} + \vec{PB} - \vec{PO} + \vec{PC} - \vec{PO} + \vec{PD} - \vec{PO} = 0$, что и будет означать требуемое равенство.

Таким образом надо доказать, что $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 0$. Действительно, пусть средняя линия трапеции — это MN. (рис. 210). Тогда $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} =$
$= \vec{OM} + \vec{MA} + \vec{OM} + + \vec{MB} + \vec{ON} + \vec{NC} +$
$+ \vec{ON} + \vec{ND} = 2\vec{OM} + 2\vec{ON} = 0$.

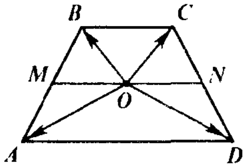


Рис. 210

Так как $\vec{MA} = -\vec{MB}$, $-\vec{NC} = -\vec{ND}$ и $\vec{OM} = -\vec{ON}$. Таким образом $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 0$, поэтому $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} = 4\vec{PO}$.

№ 342. Указание. Доказать, что сумма векторов, образованных боковыми ребрами одной грани — это сумма двух векторов, образованных апофемой.

№ 343. Возьмем точку O_1 — центр отрезка AB, таким образом точки A и B симметричны относительно точки O_1. Тогда $\vec{AO_1} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ по построению.

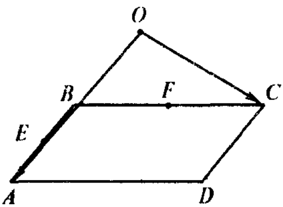


Рис. 211

Рассмотрим $\vec{AO_1} - \vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AB} = 0$, таким образом $\vec{OO_1} = 0$, поэтому точки O и O_1 совпадают. Значит, A и B симметричны относительно точки O.

№ 344. а) $\vec{AB} = \vec{DC} = -\vec{CD}$, поэтому $k = -1$

б) $\vec{AC_1} = \vec{AO} + \vec{OC_1} = 2\vec{AO}$, поэтому $k = 2$.

в) $\vec{OB_1} = \frac{1}{2}\vec{DB_1} = -\frac{1}{2}\vec{B_1D}$, поэтому $k = -\frac{1}{2}$.

№ 345. а) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CA}=2\,\overrightarrow{FE}$, так как $\overrightarrow{FE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ и лучи $\overrightarrow{FE}$ и $\overrightarrow{CA}$ сонаправлены. Таким образом $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=-2\,\overrightarrow{EF}$ (рис. 211).

б) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}==-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. Таким образом

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

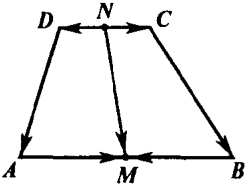


Рис. 212

№ 346. Так как $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{NM}$, то надо выразить $\overrightarrow{NM}$ через $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}$ (рис. 212);

$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}$

Сложим полученные равенства, учитывая, что $\overrightarrow{NB}=-\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{BM}$

$2\,\overrightarrow{NM}=(\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM})+(\overrightarrow{NC}+$
$+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM})=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}$.

Т. о., $\overrightarrow{NM}=\frac{-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}}{2}$. Поэтому $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}=-\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}}{2}$.

№ 347. Указание. Использовать свойства умножения вектора на число из п. 38.

№ 348. Так как AC_1 и B_1D — диагонали параллелепипеда, то они пересекаются в точке O. Тогда $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{B_1D}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{B_1O}+\overrightarrow{OD}=$
$=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{B_1O}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}=2\,\overrightarrow{BC}$.

Таким образом $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{B_1D}=2\,\overrightarrow{BC}$, что и требовалось доказать.

№ 350. Отложим вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$, от точки A, вектор $\overrightarrow{BC}$ равный $\vec{b}$, от точки B, и вектор $\overrightarrow{CD}$, равный $\vec{c}$, от точки C. Тогда $\overrightarrow{AD}=\vec{p}$. Заметим, что точки A, B, C, D не лежат на одной прямой, так как иначе векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ были бы сонаправлены. По неравенству многоугольника: $AD < AB + BC + CD$, поэтому $|\vec{p}| < |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$.

№ 351. а) Так как $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{c}$, то существует число k такое, что $\vec{a} = k \cdot \vec{c}$, аналогично $\vec{b} = n \cdot \vec{c}$. Тогда $\vec{a} + \vec{b} = k\vec{c} + n\vec{c} = (k + n)\vec{c}$. Таким образом вектора $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны.

б, в, г) Аналогично п. а).

№ 352. Так как $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{a} + \vec{b} = k \cdot (\vec{a} - \vec{b})$, таким образом $\vec{a} + \vec{b} = k\vec{a} - k\vec{b}$, значит $(k + 1)\vec{b} = (k - 1)\vec{a}$, значит $\vec{b} = \frac{k-1}{k+1}\vec{a}$ (если $k \neq -1$), $\vec{a} = 0 \cdot \vec{b}$ $(k = -1)$, но это и означает, что вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

№ 353. Указание: аналогично задаче 352.

№ 354. а) Предположим, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Тогда $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$. Но тогда $\vec{a} + \vec{b} = k\vec{b} + \vec{b} = (k + 1)\vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b} = (k - 1)\vec{b}$. Значит $\vec{a} + \vec{b} = (k + 1)\vec{b} = \frac{k+1}{k-1}\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$. Таким образом $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ коллинеарны, что противоречит условию, значит $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

б) Аналогично п. а).

§ 3. Компланарные вектора

№ 355. а) Отложим эти вектора от точки A. Тогда получится $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AA_2}$, $\overrightarrow{AA_3}$, но эти вектора, очевидно, лежат в одной плоскости. Поэтому $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ компланарные вектора (рис. 213).

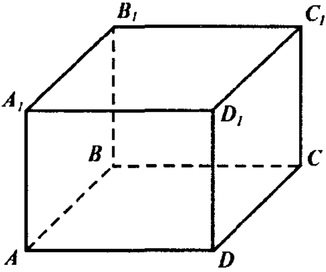


Рис. 213

б) Эти векторы уже отложены от одной точки A. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и

$\vec{AD}$ лежат в плоскости $ABCD$, а вектор $\vec{AA_1}$ не лежит в этой плоскости. Поэтому $\vec{AA_1}$, $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ не компланарны.

в) Отложим эти векторы от точки A. Тогда получатся векторы $\vec{A_1A_2}$, $\vec{AC}$, $\vec{AA}$, где A_2 — симметричная точка к A_1 относительно точки A. Очевидно, что данные три вектора лежат в плоскости AA_1C_1C. Поэтому и исходные вектора компланарны.

г) Отложив эти вектора от точки A получим вектора $\vec{AD}$, $\vec{AA_1}$, $\vec{AB}$, которые не компланарны (см. п. б). Поэтому и вектора $\vec{AD}, \vec{CC_1}$, $\vec{A_1B}$ не компланарны.

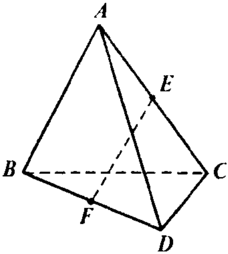


Рис. 214

№ 356. Так как (рис. 214)

$\vec{FE} = \vec{FB} + \vec{BA} + \vec{AE}$ и

$\vec{FE} = \vec{FD} + \vec{DC} + \vec{CE}$

Сложив эти равенства получаем:

$2\vec{FE} = (\vec{FB} + \vec{BA} + \vec{AE}) + (\vec{FD} + \vec{DC} + \vec{CE}) =$

$= \vec{BA} + \vec{DC}$ (так как $\vec{FB} = -\vec{FD}$ и $\vec{AE} = -\vec{CE}$).

Вектора $\vec{BA}$, $\vec{FE}$, $\vec{DC}$ компланарны по признаку компланарности векторов.

№ 357. $\vec{DD_1} = \vec{DA} + \vec{AD_1}$; $\vec{BB_1} = \vec{BA} + \vec{AB_1}$ (рис. 215).

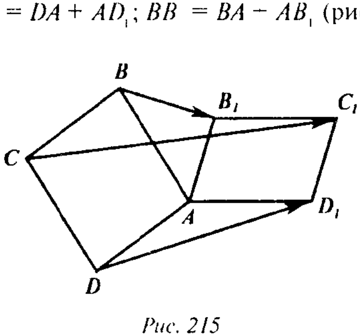


Рис. 215

$\vec{DD_1} + \vec{BB_1} = \vec{DA} + \vec{AD_1} + \vec{BA} + \vec{AB_1} = \vec{DA} + \vec{BA} + \vec{AD_1} + \vec{AB_1} =$

$= \vec{CB} + \vec{CD} + \vec{AD_1} + \vec{AB_1} = \vec{CA} + \vec{AC_1} = \vec{CC_1}$, поэтому

$\vec{CC_1} = \vec{DD_1} + \vec{BB_1}$, значит, векторы $\vec{BB_1}, \vec{CC_1}, \vec{DD_1}$ компланарны.

№ 358. Указание. Воспользоваться правилом параллелепипеда сложения трех векторов.

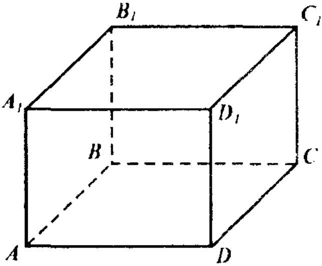


Рис. 216

№ 359. а) BD_1 — диагональ параллелепипеда, а тогда $\vec{BD_1} = \vec{BB_1} + \vec{BC} + \vec{BA}$ (рис. 216).

б) $\vec{B_1D_1} = \vec{A_1D_1} - \vec{A_1B_1}$, но $\vec{A_1B_1} = \vec{A_1B} + \vec{BB_1} = \vec{A_1B} + \vec{AA_1}$

Таким образом $\vec{B_1D_1} = \vec{A_1D_1} - \vec{A_1B} + \vec{A_1A}$.

№ 360. а) (рис. 217)

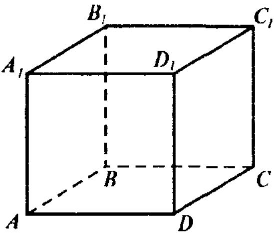


Рис. 217

$$\vec{E}_A = \frac{kq}{A_1A^3}\cdot\vec{A_1A} + \frac{kq}{BA^3}\cdot\vec{BA} + \frac{kq}{DA^3}\cdot\vec{DA} = \frac{kq}{a^3}(\vec{A_1A} + \vec{BA} + \vec{DA}) = -\frac{kq}{a^3}(\vec{AA_1} + \vec{AB} + \vec{AD}) = -\frac{kq}{a^3}\cdot\vec{AC_1}.$$

$$\vec{E}_{C_1} = \frac{kq}{A_1C_1^3}\cdot\vec{A_1C_1} + \frac{kq}{BC_1^3}\cdot\vec{BC_1} + \frac{kq}{DC_1^3}\cdot\vec{DC_1} = \frac{kq}{2\sqrt{2}a^3}(\vec{A_1C_1} + \vec{BC_1} + \vec{DC_1}) = \frac{kq}{2\sqrt{2}a^3}\cdot(\vec{A_1D_1} + \vec{D_1C_1} + \vec{BC} + \vec{CC_1} + \vec{DD_1} + \vec{D_1C_1}) = \frac{kq}{2\sqrt{2}a^3}(2\vec{AD} + 2\vec{AA_1} + 2\vec{AB}) = \frac{kq}{a^3\sqrt{2}}\cdot\vec{AC_1}$$

б) $\vec{E}_c = \frac{kq}{3\sqrt{3}a^3} \cdot \overrightarrow{A_1C} + \frac{kq}{a^3} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{kq}{a^3} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{kq}{a^3}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\overrightarrow{A_1A} + \left(1+\frac{\sqrt{3}}{9}\right) \times\right.$

$\left.\times \overrightarrow{BC} + \left(1+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\overrightarrow{DC}\right).$

E_c — диагональ прямоугольного параллелепипеда, построенного на векторах $\frac{kq}{a^3}\frac{\sqrt{3}}{9}\overrightarrow{A_1A}$, $\frac{kq}{a^3}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\overrightarrow{BC}$, $\frac{kq}{a^3}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\overrightarrow{DC}$, поэтому

$$|\vec{E}_c| = \frac{kq}{a^3}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{9}a\right)^2 + \left(\left(1+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)a\right)^2 + \left(\left(1+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)a\right)^2} =$$

$$= \frac{kq}{a^2}\sqrt{19+4\sqrt{3}}$$

Абсолютная величина результирующей напряженности в остальных точках считается аналогично.

№ 361. Аналогично задаче 359.

№ 363. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD}$, но $\overrightarrow{CD} =$ $= \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$, т. о. $\overrightarrow{OD} = \vec{c} + \vec{a} - \vec{b}$, т. к. M — середина AC, то

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$, т. о.

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$ (рис. 218).

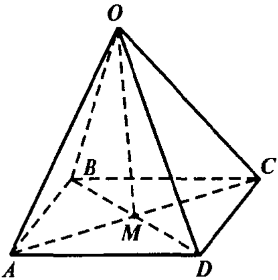


Рис. 218

№ 364. Так как K — середина B_1C_1, то $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1})$, но

$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} = \vec{c} + \vec{a}$

$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{c} + \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}.$

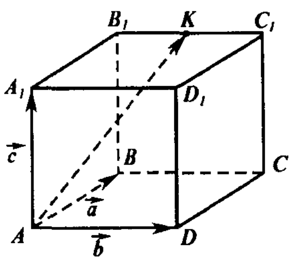


Рис. 219

$\overrightarrow{AK}$ — диагональ прямоугольного параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{B_1K}$, $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{B_1B}$, $\Rightarrow |\overrightarrow{AK}| = \sqrt{m^2 + m^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2} = \frac{3m}{2}$.

№ 365. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ и т. к. K — середина MD, то

$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OD})$, но

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{c} + \vec{a} - \vec{b}$. Поэтому

$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} + \vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{b}$.

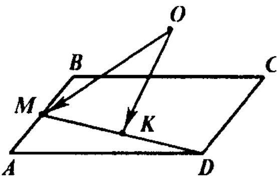


Рис. 220

№ 367. $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{7}\overrightarrow{KA_1} \Rightarrow$ по задаче 349:

$$\overrightarrow{DK} = \frac{\overrightarrow{DA} + \frac{3}{7}\overrightarrow{DA_1}}{1 + \frac{3}{7}} = \frac{7\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DA_1}}{10}.$$

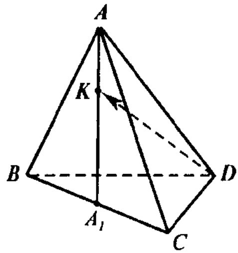


Рис. 221

Но $\overrightarrow{DA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$, так как A_1 — середина BC. Поэтому

$$\overrightarrow{DK} = \frac{7\overrightarrow{DA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}}{10} = \frac{7}{10}\overrightarrow{DA} + \frac{3}{20}\overrightarrow{DB} + \frac{3}{20}\overrightarrow{DC}.$$

№ 368. а) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

б) $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}((\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BA}) = -\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

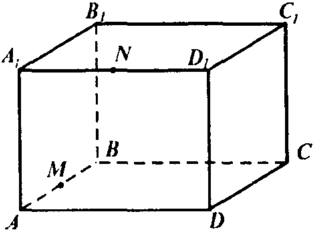


Рис. 222

в) Аналогично п. б).

г) Это невозможно, так как векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC_1}$ не компланарны.

д) $\overrightarrow{A_1N} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1D_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

е) Аналогично г).

ж) Аналогично б).

№ 369. Указание. Воспользоваться задачей 366.

№ 370. Точки N и M являются центрами треугольников ABC и BCD (рис. 223).

а) $\overrightarrow{DN} = \frac{\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DA_1}}{3} = \frac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

б) Очевидно, что $\triangle KMN \sim \triangle KDA$, причем коэффициент подобия равен $\frac{NM}{AD} = \frac{1}{3}$, т. к. $\triangle A_1NM \sim \triangle A_1AD$ и $\frac{NM}{AD} = \frac{A_1N}{A_1A} = \frac{1}{3}$.

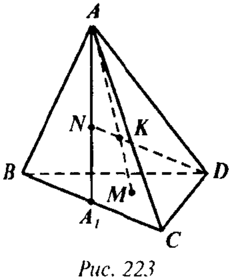


Рис. 223

Поэтому, $\frac{KN}{DK} = \frac{NM}{AD} = \frac{1}{3}$. Значит

$\overrightarrow{DK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DN} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4}$.

в) $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AA_1}}{3} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{3} =$

$= \frac{\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DA}}{3} = \frac{\vec{c} + \vec{b} - 3\vec{a}}{3}$.

г) $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AM} = \frac{3\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}}{12}$.

№ 371. Указание. Воспользоваться задачами 366 и 350.

№ 373. Докажем, что M_1 — точка пересечения медиан $\triangle A_1B_1C_1$ CK — медиана $\triangle ABC$.

K_1 — проекция точки K на плоскость α. Так как $K \in AB$, то $K \in A_1B_1$ и так как $AK = KB$, то $A_1K_1 = K_1B_1$.

Поэтому C_1K_1 — медиана $\triangle A_1B_1C_1$. Но $M \in CK$ и поэтому $M_1 \in C_1K_1$. Поэтому M_1 лежит на любой медиане $\triangle A_1B_1C$. Таким образом M_1 — точка пересечения медиан $\triangle A_1B_1C$.

$$\vec{MM_1} = \vec{MA} + \vec{AA_1} + \vec{A_1M_1};$$

$$\vec{MM_1} = \vec{MB} + \vec{BB_1} + \vec{B_1M_1};$$

$$\vec{MM_1} = \vec{MC} + \vec{CC_1} + \vec{C_1M_1}.$$

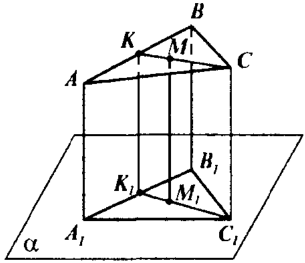


Рис. 224

Сложив полученные равенства, учитывая, что

$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 0$ и

$\vec{A_1M_1} + \vec{B_1M_1} + \vec{C_1M_1} = 0$,

получаем $3\,\vec{MM_1} = \vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1}$.

Так как векторы $\vec{MM_1}$, $\vec{AA_1}$, $\vec{BB_1}$, $\vec{CC_1}$ сонаправлены, то

$3MM_1 = AA_1 + BB_1 + CC_1$, ч. т. д.

Если какие-то стороны $\triangle ABC$ пересекаются с плоскостью α, то векторы $\vec{MM_1}$, $\vec{AA_1}$, $\vec{BB_1}$, $\vec{CC_1}$ не будут сонаправлены, поэтому требуемое равенство не будет верно.

№ 374. По задаче 356 $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{BD})$, но векторы $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$ не сонаправлены, так как A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

Поэтому $|\vec{MN}| < \frac{1}{2}(|\vec{AC}| + |\vec{BD}|)$, т.е. $MN < \frac{1}{2}(AC + BD)$, ч. т. д.

№ 375. Пусть точки E, F, G, H — середины KC, BM, KD, AM (рис. 225).

Тогда $\vec{EF} = \vec{OF} - \vec{OE}$, а $\vec{OF} = \frac{1}{2}(\vec{OM} + \vec{OB})$ и $\vec{OE} = \frac{1}{2}(\vec{OK} + \vec{OC})$.

Поэтому $\vec{EF} = \frac{1}{2}\vec{OM} + \frac{1}{2}\vec{OB} - \frac{1}{2}\vec{OK} - \frac{1}{2}\vec{OC} = \frac{1}{4}(\vec{OD} + \vec{OC}) + \frac{1}{2}\vec{OB} -$

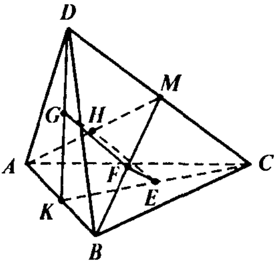


Рис. 225

$$-\frac{1}{4}(\vec{OA}+\vec{OB})-\frac{1}{2}\vec{OC}=\frac{1}{4}\vec{OD}-\frac{1}{4}\vec{OC}+$$
$$+\frac{1}{4}\vec{OB}-\frac{1}{4}\vec{OA}=\frac{1}{4}(\vec{OD}-\vec{OC}+$$
$$+\vec{OB}-\vec{OA}).$$

$$\vec{HG}=\vec{OG}-\vec{OH}=\frac{1}{2}(\vec{OD}+\vec{OK})-$$
$$-\frac{1}{2}(\vec{OA}+\mathrm{OM})=\frac{1}{2}\vec{OD}+\frac{1}{4}(\vec{OA}+$$
$$+\vec{OB})-\frac{1}{2}\vec{OA}-\,-\frac{1}{4}(\vec{OD}+\vec{OC})=$$
$$=\frac{1}{4}\vec{OD}+\frac{1}{4}\vec{OB}-\frac{1}{4}\vec{OA}-\frac{1}{4}\vec{OC}=\frac{1}{4}(\vec{OD}-\vec{OC}+\vec{OB}-\vec{OA}),$$

поэтому $\vec{EF}=\vec{HG}$ и значит $EFGH$ — параллелограмм.

Вопросы к главе IV

1. а) Да, так как они лежат на параллельных прямых.
   б) Нет, они они могут быть противоложно направлены.
   в) Да.
   г) Нет, например $\vec{a}$ и $2\vec{a}$.
   д) Нет, $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{c}$.
   е) Да, например три стороны параллелограмма.

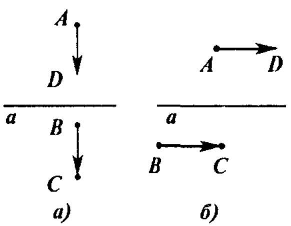


Рис. 226

2. Да, так как $ABCD$ — параллелограмм и BD — его диагональ, а O — центр.
3. а) Да, (рис. 226 а).
   б) Да, (рис. 226 б).
4. а) Да; б) Да.
5. Да, так как $\vec{a}$ и $\vec{a}-(\vec{a}+\vec{b})$ коллинеарны.
6. Да, например $\vec{a}+(-\vec{a})=0$.
7. Да, если все векторы сонаправлены.

8. Да, если эти векторы противоположно направлены.

9. Да, если эти векторы сонаправлены.

10. Да, если эти векторы перпендикулярны.

11. а) На 1; б) на – 3; в) на – k; г) на 0.

12. а) Эти прямые параллельны при $k = 1$

б) При $k \neq 1$ и $k \neq 0$ эти прямые пересекаются. Прямые AC и BD не могут быть скрещивающимися, т. к. лежат в одной плоскости.

13. а, б) Да, эти векторы лежат в плоскости, проходящей через вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

14. Да.

15. Нет, так как если эти вектора лежат в одной плоскости, то точка O лежит в плоскости ABC, но точка O не лежит в этой плоскости.

Дополнительные задачи

№ 376. а) Так как $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$ и $\overrightarrow{M_1Q_1} = \overrightarrow{N_1P_1}$, то $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{M_1Q_1} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{N_1P_1}$, ч. т. д.

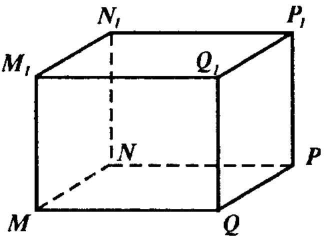


Рис. 227

б) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP_1} = \overrightarrow{P_1Q_1} + \overrightarrow{NP_1} = \overrightarrow{NP_1} + \overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{NQ_1}$

в) $\overrightarrow{Q_1P_1} + \overrightarrow{QQ_1} = \overrightarrow{QQ_1} + \overrightarrow{Q_1P_1} = \overrightarrow{QP_1}$.

№ 377. а) Как и в задаче 282 получаем, что $ABFD$ — квадрат. Поэтому $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$.

б) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EC}$.

в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AF}$.

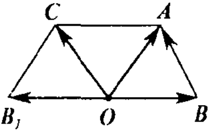


Рис. 228

№ 378. Отложим вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $-\vec{b}$ от точки O. $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OB_1} = -\vec{b}$.

Найдем сумму $\vec{OA} + \vec{OB_1} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Это будет $\vec{OC}$, где $OACB$ — параллелограмм. Но тогда $AC \parallel OB_1$, поэтому $AC \parallel OB$ и $AC = OB_1 = OB$, поэтому $OCAB$ — тоже параллелограмм и значит $\vec{OC} = \vec{BA}$. Но так как $\vec{OB} + \vec{BA} = \vec{OA}$, это и означает, что $\vec{OC} = \vec{a} - \vec{b}$. Таким образом, $\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$.

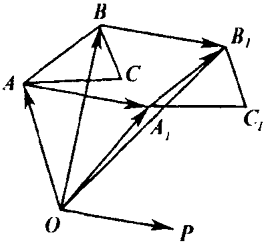


Рис. 229

№ 379. Аналогично задаче 333.

№ 380. Аналогично задаче 358.

№ 381. $\vec{OA} = \vec{OA} + \vec{OP}$, с другой стороны $\vec{OA_1} = \vec{OA} + \vec{AA_1}$.

Таким образом, $\vec{OP} = \vec{AA_1}$, аналогично $\vec{OP} = \vec{BB_1}$, $\vec{OP} = \vec{CC_1}$.

Значит $\vec{AA_1} = \vec{BB_1} = \vec{CC_1}$, но тогда ABB_1A_1 — параллелограмм и значит $\vec{AB} = \vec{A_1B_1}$, что и означает, что стороны AB и A_1B_1 равны и параллельны. Аналогично $\vec{BC} = \vec{B_1C_1}$ и $\vec{AC} = \vec{A_1C_1}$, ч. т. д.

№ 382. а) k — любое; б) $k > 0$; в) $k < 0$; г) $k = -1$.

№ 383. а) Предположим, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Тогда $\vec{a} = n\vec{b}$. Следовательно $\vec{a} + k\vec{b} = (1 + nk)\vec{b}$, $\vec{a} + l\vec{b} = (1 + ln)\vec{b}$. Но тогда $\vec{a} + k\vec{b} = \frac{1 + nk}{1 + nl} \cdot (\vec{a} + l\vec{b})$, т.е. вектора $\vec{a} + k\vec{b}$ и $\vec{a} + l\vec{b}$ коллинеарны, что противоречит условию. Значит $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

б) Если $\vec{a} + k_1\vec{b}$ коллинеарен $\vec{a} + l_1\vec{b}$, то $\vec{a} + k_1\vec{b} = n \cdot (\vec{a} + l_1\vec{b})$, тогда $(k_1 - l_1 n)\vec{b} = (n - 1)\vec{a}$.

А это означает, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, но тогда и $\vec{a}+k\vec{b}$ и $\vec{a}+l\vec{b}$ коллинеарны, что противоречит условию.

№ 384. Так как C_1 — середина AB, то (рис. 230) $\vec{OC_1}=\frac{1}{2}(\vec{OB}+\vec{OA})$, аналогично

$$\vec{OA_1}=\frac{1}{2}(\vec{OB}+\vec{OC});\ \vec{OB_1}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OC}).$$

Сложив полученные равенства, получаем: $\vec{OA_1}+\vec{OB_1}+\vec{OC_1}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$, ч. т. д.

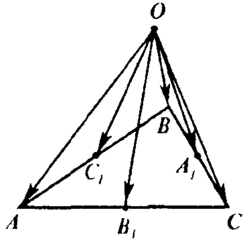


Рис. 230

№ 385. $\vec{OM}=\frac{1}{4}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD})$.

Пусть K, L, P, N — середины AB, BC, CD, AD соответственно. Тогда $KL \parallel AC$ и $NP \parallel AC$, как средние линии $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$.

Аналогично $KN \parallel BD$ и $LP \parallel BD$. Поэтому $KLPN$ параллелограмм, а значит $MN = ML$.

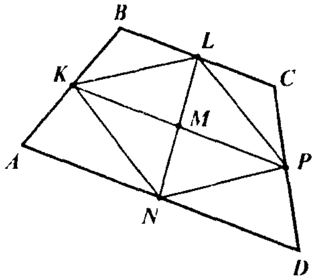


Рис. 231

Тогда $\vec{OM}=\frac{1}{2}(\vec{OL}+\vec{ON})=$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\vec{OB}+\vec{OC})+\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OD})\right)=$$

$$=\frac{1}{4}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}),$$ что и требовалось доказать.

№ 386. Указание. O — есть точка пересечения средних линий параллелограмма. Тогда можно воспользоваться задачей 385.

№ 387. а) $\vec{OP}=\vec{ON}+\vec{NP}=\vec{ON}+2\vec{MN}$, но $\vec{MN}=\vec{ON}-\vec{OM}$, поэтому

$$\vec{OP}=\vec{ON}+2(\vec{ON}-\vec{OM})=3\vec{ON}-2\vec{OM}$$

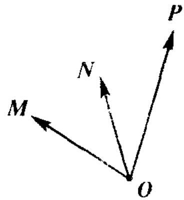


Рис. 232

б) Так как $\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PN}$ и $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN}$, то $\frac{1}{2}\overrightarrow{MP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = 0$.

Т.е. $\overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{MN}\,\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM} - (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) =$
$= 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$.

в) Аналогично п. а).

№ 388. Чтобы доказать компланарность, достаточно показать, что один вектор раскладывается по двум другим векторам.

а) Пусть $\vec{p} = 0$. Тогда $\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b}$, что и означает, что векторы $\vec{p}, \vec{a}, \vec{b}$ компланарны.

б) Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — коллинеарны, т. е. $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$. Тогда $\vec{a} = k \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{p}$, т. е. $\vec{p}, \vec{a}, \vec{b}$ компланарны.

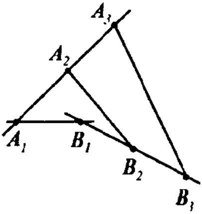


Рис. 233

№ 389. $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{B_2B_1}$

$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_3B_3} + \overrightarrow{B_3B_1}$ (рис. 233)

Вычтем из первого равенства второе с коэффициентом k. Тогда $(1 - k)\,\overrightarrow{A_1B_1} =$
$= (\overrightarrow{A_1A_2} - k\,\overrightarrow{A_1A_3}) + \overrightarrow{A_2B_2} - k\overrightarrow{A_3B_3} + (\overrightarrow{B_2B_1} - k\,\overrightarrow{B_3B_1})$, $(1 - k)\,\overrightarrow{A_1B_1} = 0 + \overrightarrow{A_2B_2} - k\,\overrightarrow{A_3B_3} + 0$, т. о. $\overrightarrow{A_2B_2} = (1 - k)\,\overrightarrow{A_1B_1} + k\,\overrightarrow{A_3B_3}$, т. е. векторы $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{A_3B_3}$ компланарны, а это и означает, что прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 параллельны одной плоскости.

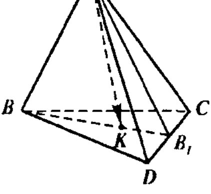


Рис. 234

№ 390. Аналогично задаче 360.

№ 391. Так как K — середина BB_1, то $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB_1})$, но $\overrightarrow{AB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC})$, таким образом $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, т.е. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$.

№ 392. Аналогично задаче 359

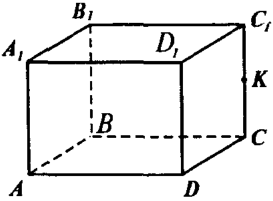


Рис. 235

№ 393. а) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{AC})$, но $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Таким образом $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$; $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$.

б) $\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA_1}$, но $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC_1} + \overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{CD_1}$. Поэтому $\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CD_1}$.

№ 394. Аналогично задаче 393.

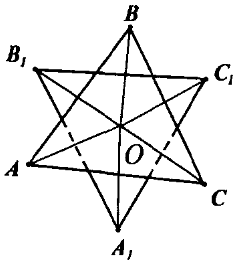


Рис. 236

№ 395. $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA_1}$;

$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OB_1}$; $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OC_1}$. Тогда

$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}) + (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}) = 0 + 0 = 0$, так как O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$.

Поэтому векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ компланарны, а значит прямые AA_1, BB_1, CC_1 параллельны некоторой плоскости.

№ 396. Аналогично задаче 362.

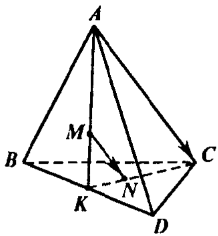


Рис. 237

№ 397. Пусть K — середина BD (рис. 237). Тогда $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KN}$, и т. к. $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AK}$, а $\overrightarrow{KN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KC}$, то $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Поэтому $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, откуда следует, что $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{3}AC$.

№ 398. O, O_1, O_2 — точки пересечения медиан (рис. 238). Тогда $\vec{OO_1} = \vec{OB_1} + \vec{B_1O_1}$; $\vec{OO_1} = \vec{OA_1} + \vec{A_1O_1}$; $\vec{OO_1} = \vec{OC_1} + \vec{C_1O_1}$. Поэтому

$3\vec{OO_1} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1} + \vec{A_1O_1} + \vec{B_1O_1} + \vec{C_1O_1}$. Но O_1 — центр треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому $\vec{A_1O_1} + \vec{B_1O_1} + \vec{C_1O_1} = \vec{0}$. Таким образом,

$3\vec{OO_1} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1}$.

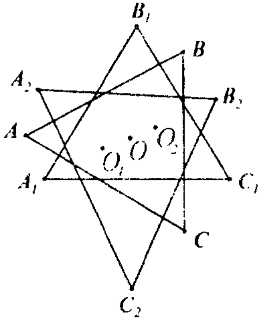


Рис. 238

Аналогично $3\vec{OO_2} = \vec{OA_2} + \vec{OB_2} + \vec{OC_2}$, тогда $3\vec{OO_1} + 3\vec{OO_2} = (\vec{OA_1} + \vec{OA_2}) + (\vec{OB_1} + \vec{OB_2}) + (\vec{OC_1} + \vec{OC_2}) = 2(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) = \vec{0}$.

$\frac{1}{2}(\vec{OA_1} + \vec{OA_2}) = \vec{OA}$, т. к. A — центр отрезка A_1A_2. Значит $3\vec{OO_1} + 3\vec{OO_2} = \vec{0}$, т. е. $\vec{OO_1} = -\vec{OO_2}$.

Но это означает, что векторы $\vec{OO_1}$ и $\vec{OO_2}$ — коллинеарны, а значит прямые OO_1 и OO_2 параллельны. Так как есть общая точка, то эти прямые совпадают. Значит точки O, O_1, O_2 лежат на одной прямой.

№ 399. Из задачи 397 следует, что стороны треугольника, вершинами которого являются точки пересечения медиан боковых граней, равны $\frac{1}{3}$ соответственных сторон треугольника, являющегося основанием. По признаку подобия по трем пропорциональным сторонам следует, что треугольники подобны, что и требовалось доказать.